UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Magne Kringlebotn
Telefon: 3457

Kontinuasjonseksamen i
Fag 74316 Elektrisitet og magnetisme 2
Torsdag 18. august 1994
Tid: 09.00–1300

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

En ukevis oppsummering av forelesningene i dette faget følger som et vedlegg til eksamens-settet. Merk at innholdet i denne oppsummeringen er valgt ut uavhengig av eksamensoppgavene.

Oppgave 1:

Forklar kort (gjerne i stikkords form) og kvalitativt hva du forbinder med følgende begreper

a) Einsteins summekonvension

b) Ampéres og Faradays lover

c) Konstituerende ligninger

d) Speilingsmetoden

e) Kramers-Kronig relasjonene

f) Snell's brytningslov

g) Brewsters vinkel

h) Oscillatorstyrker

i) Rayleigh-spredning

j) Synkrotronstråling

Oppgave 2:
Det elektriske feltet i atmosfæren er ved jordoverflaten ca. 200 V/m, rettet nedover. I 1400 meters høyde er $\vec{E}$-feltet bare 20 V/m, fortsatt rettet nedover.

a) Hvor stor omtrent er den totale elektriske ladningen på jorda?

b) Hvor stor er den midlere ladningstettheten i atomsfæren under 1400 m?

Oppgitt: Jordradien $R_j \approx 6.4 \times 10^6$ m, permittiviteten for fritt rom $\varepsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}$ F/m, og protonladningen $e \approx 1.6 \times 10^{-19}$ C.

Oppgave 3:
Sterke magnetfelter, opprettholdt av superledende magneter, har vært vurdert som et medium for lagring av energi.

a) Hvor stor er energitettheten i et magnetfelt på 10 Tesla?

b) Med et magnetfelt på 10 Tesla, hvor stort volum trenges for å lagre like mye energi som i et 60 Ampéretimers, 12 V bilbatteri?

c) Med et magnetfelt på 10 Tesla, hvor stort blir trykket mot veggene av en slik beholder (f.eks. av torus-form) for magnetisk lagret energi? Oppgi svaret i atomsfærer.

d) For å opprettholde magnetfeltet på 10 Tesla må det gå en kraftig strøm i veggene på beholderen. Bestem tettheten av denne.

Oppgitt: Permeabiliteten for tomt rom, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m. En atomsfæres trykk, 1 atm = 1.01325×10^5 N/m^2.

Oppgave 4:
Det nøytrale π-mesonet kan forfalle til et elektron og et positron. I en slik prosess blir plutselig elektrisk ladning skapt og satt i bevegelse (like mye positiv som negativ ladning). Du skal her studere den elektromagnetiske strålingen som nødvendigvis vil oppstå i denne prosessen, som altså blir

$$\pi^0 \to e^+ + e^- + \textit{elektromagnetisk stråling.}$$

Hvis man antar at π^0-mesonet er i ro i origo før det forfaller ved tiden $t = 0$, og at det skapte elektronet (positronet) etterpå beveger seg langs positiv (negativ) z-akse, kan man modellere prosessen ved følgende ladnings- og strøm-fordeling:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= -e\,\theta(t)\,\delta(x)\,\delta(y)\,[f(z - z_e(t)) - f(z + z_e(t))]\,, \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= -e\,\dot{z}_e(t)\,\hat{e}_z\,\theta(t)\,\delta(x)\,\delta(y)\,[f(z - z_e(t)) + f(z + z_e(t))]\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Her er $z_e(t)$ banen til elektronet, med $z_e(0) = 0$, og $\theta(t)$ er stepp-funksjonen,

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{for } t = 0, \\ 0 & \text{for } t < 0. \end{cases}$$

$f(\zeta)$ er en funksjon som modellerer elektronets/positronets utstrekning, den er forskjellig fra null i et lite område rundt $\zeta = 0$ og normert slik at $\int d\zeta\, f(\zeta) = 1$.

a) Vis at uttrykkene (1) oppfyller kontinuitetesligningen for ladning og strøm.

b) Forholdet mellom massen til π^0-mesonet og elektronet er $m_\pi/m_e = m_\pi/m_{\bar{e}} \approx 264$. Hvilken hastighet $v_e \equiv \dot{z}_e(\infty)$ må elektronet bevege seg med etter forfallet for at energi og impuls skal være bevart i prosessen? Uttrykk dette ved $\beta_e \equiv v_e/c$ eller $\gamma_e \equiv 1/\sqrt{1-\beta_e^2}$, og se bort fra den energien som stråles ut elektromagnetisk.

c) Den elektromagnetiske strålingen i prosessen kan uttrykkes ved den fouriertransformerte av strømtettheten, $\vec{\jmath}(\vec{k},\omega) \equiv \int d^3r\, dt\; \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\, \vec{\jmath}(\vec{r},t)$. Finn først

$$\vec{\jmath}(\vec{k},t) \equiv \int d^3r\; \mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \vec{\jmath}(\vec{r},t).$$

Uttrykk svaret ved $\tilde{f}(k) \equiv \int d\zeta\; \mathrm{e}^{-k\zeta} f(\zeta)$ (og andre mer eksplisitt gitte størrelser).

d) Anta så at $z_e(t) = v_e\, t$ (for $t > 0$), og bestem $\vec{\jmath}(\vec{k},\omega)$. Du kan bruke integrasjonsformelen $\int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{iat} = i/a$.

e) Finn så et uttrykk for frekvens- og vinkel-fordelingen av den elektromagnetiske strålingen i prosessen, $d\mathcal{U}/d\Omega\, d\omega$.

f) For ikke altfor høye frekvenser ω kan man sette $\tilde{f} = 1$ i det uttrykket du fant over. I hvilke retninger i forhold til til z-aksen vil man da få maksimal utstråling?

FORELEST UKE 1

Kapittel 1

Innledning

1.1 Maxwells ligninger i fritt rom

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \nabla\cdot\vec{B}=0,\quad \nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0,\quad \nabla\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{\jmath},\quad \vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right).$$

1.1.1 Divergensteoremet. Coulombs lov for punktladning

$$\int_V d^3r\,\nabla\cdot\vec{E}=\int_{\partial V}d^2\vec{\sigma}\cdot\vec{E}\quad\&\quad \vec{E}(\vec{r})=\hat{r}E(r)\implies \vec{E}(\vec{r})=\frac{q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

1.1.2 Magnetiske monopoler finnes ikke?

1.1.3 Stokes' teorem. Faradays induksjonslov

$$\int_S d^2\vec{\sigma}\cdot(\nabla\times\vec{E})=\int_{\partial S}d\vec{\ell}\cdot\vec{E}=-\frac{d}{dt}\int_S d^2\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$$

1.1.4 Ampères lov. Maxwells forskyvnings-strøm

$$\int_S d^2\vec{\sigma}\cdot(\nabla\times\vec{B})=\int_{\partial S}d\vec{\ell}\cdot\vec{B}=\mu_0\int_S d^2\vec{\sigma}\cdot\vec{\jmath}_{eff},\quad \vec{\jmath}_{eff}\equiv\vec{\jmath}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

1.1.5 Løsbarhetsbetingelse for Maxwells ligninger: Ladningskonservering

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{\jmath}=0$$

1.2 Potensialer og juster-invarians

1.2.1 Skalarpotensial og vektorpotensial

$$\vec{E}=-\left(\nabla\Phi+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right),\quad \vec{B}=\nabla\times\vec{A}.$$

1.2.2 Juster-transformasjoner

$$\Phi\to\Phi'=\Phi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t},\quad \vec{A}\to\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\Lambda$$

FORELEST UKE 2

Kapittel 1

Innledning (forts.)

1.2 Potensialer og juster-invarians (forts.)

1.2.2 Juster-transformasjoner (forts.)

$$\int_S d^2\vec{\sigma}\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \int_{\partial S} d\vec{\ell}\cdot\vec{A} = \int_S d^2\vec{\sigma}\cdot\vec{B}, \quad \text{(relatert til Bohm-Aharanov effekten.)}$$

1.2.3 Lorentz justering

Lorentz betingelsen, $\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{A} = 0$, fører til bølgeligningen

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)A^\nu = \mu_0\, j^\nu, \quad A^\nu = \left(\frac{1}{c}\,\Phi, \vec{A}\right)^\nu, \quad j^\nu = (\rho\, c, \vec{j})^\nu$$

1.2.4 Coulomb justering: $\nabla\cdot\vec{A} = 0$

$$\text{Instantant Coulombpotensial: } \Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x'\,\frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Bølgeligningen kan skrives

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = \mu_0\vec{j}_\perp, \quad \text{der } \nabla\cdot\vec{j}_\perp = 0 \text{ (“transvers strøm”)}$$

Transverst og longitudinalt $\vec{E}$-felt: $\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel$, der $\vec{E}_\perp = -\partial\vec{A}/\partial t$ og $\vec{E}_\parallel = -\nabla\Phi$.

1.3 Felter og vektor-analyse

1.3.1 ∇ og de fire felt-kategoriene

Multiplikasjonstabellen for ∇. $d : \omega \to d\omega$, $d^2\omega = 0$, $d\phi = 0 \Longrightarrow \phi = d\omega$, $\int_M d\omega = \int_{\partial M}\omega$.

1.3.2 Polare og aksiale vektorer. Ekte skalarer og pseudoskalarer

Et polart vektorfelt forandrer fortegn under rominversjon. Et aksialt vektorfelt forandrer ikke fortegn under rominversjon. Et pseudoskalart felt forandrer fortegn under rominversjon.

1.3.3 Komponent-notasjon. Einstein's summekonvensjon. ε-tensoren

$$\varepsilon^{ijk}\,\varepsilon^{i\ell m} = \delta^{j\ell}\,\delta^{km} - \delta^{jm}\,\delta^{k\ell}.$$

FORELEST UKE 3

Kapittel 1

Innledning (forts.)

1.4 De makroskopiske ligningene

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \vec{j}.$$

1.4.1 Konstituerende relasjoner

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E}) + \cdots, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}(\vec{H}) + \cdots, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} + \cdots.$$

1.4.2 Sammenhengen med Maxwell's ligninger i vakuum

Man skiller mellom "fri" og bundne ladninger, der de siste kan gi opphav til en polarisering.

$$\langle \rho(\vec{x}) \rangle = \rho_{makr}(\vec{x}) - \nabla \cdot \vec{P}(\vec{x}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \, \partial x^j} Q^{ij} + \cdots, \quad \Longrightarrow \quad D^i = \varepsilon_0 E^i + P^i - \frac{\partial}{\partial x^j} Q^{ij} + \cdots$$

Kapittel 2

Felt fra gitte ladninger og strømmer

2.1 Skalar bølgeligning. Kulebølger.

Løsningen av den inhomogene bølgeligningen,

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) f(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t),$$

kan skrives som et integral,

$$f(\vec{x}, t) = \int d^3x' \, dt' \; G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') \, g(\vec{x}', t'),$$

der $G(\vec{x}, t)$ er løsning av

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) G(\vec{x}, t) = \delta(t) \, \delta(\vec{x}).$$

For $t \neq 0$, $\vec{x} \neq 0$ kan løsningen skrives som en kulebølge $G(\vec{x}, t) = \frac{1}{r}\left[g_+(t - r/c) + g_-(t + r/c)\right]$, der $r = |\vec{x}|$. Sammenholdt med startbetingelsen finnes (retarderte løsninger)

$$G(\vec{x}, t) = \frac{\delta(t - r/c)}{4\pi r}.$$

FORELEST UKE 4

Kapittel 2

Felt fra gitte ladninger og strømmer (forts.)

2.2 Retarderte potensialer

$$\Phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}',t_r)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}, \quad \vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{\vec{\jmath}(\vec{x}',t_r)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}, \quad t_r = t - |\vec{x}-\vec{x}'|/c$$

2.3 Felt fra stasjonære ladninger og strømmer

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \, \frac{(\vec{x}-\vec{x}')\,\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}, \quad \vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3x' \, \frac{\vec{\jmath}(\vec{x}')\times(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}.$$

2.4 Dipol og kvadrupol. Multipol-utvikling

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{x^i\,x'^i}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2}\left(3\frac{x^i x^j}{|\vec{x}|^5} - \frac{\delta^{ij}}{|\vec{x}|^3}\right) x'^i\,x'^j + \cdots$$

$$Q = \int d^3x' \, \rho(\vec{x}'), \quad P^i = \int d^3x' \, x'^i \rho(\vec{x}'), \quad Q^{ij} = \int d^3x' \, \left(3x'^i\,x'^j - \vec{x}'^2\,\delta^{ij}\right)\rho(\vec{x}').$$

Kapittel 3

Elektrostatikk i ulike geometrier

3.1 Sjøtningsbetingelser mellom ulike medier

$$D_2^n - D_1^n = \sigma, \quad B_2^n - B_1^n = 0, \quad E_2^t - E_1^t = 0, \quad \hat{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$$

3.2 Potensialproblemer med randbetingelser

3.2.1 Speilladningsmetoden: Plan leder

FORELEST UKE 5

Kapittel 3

Elektrostatikk i ulike geometrier (forts)

3.2 Potensialproblemer med randbetingelser (forts)

3.2.1 Speilladningsmetoden: Plan leder (forts)

Speilladning $q' = -q$ i punktet $\vec{x}'_S = (-x', y', z') \implies$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'_S|}\right] \implies \vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{x}-\vec{x}'_S}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} - \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'_S|^3}\right], \quad \text{for } x > 0.$$

Indusert overflateladning: $\sigma(y,z) = \varepsilon_0\, \hat{e}_x \cdot \vec{E}(0,y,z) = -(q/4\pi)\,(2x'/[x'^2 + y^2 + z^2]^{3/2})$.

3.2.2 Green funksjon for plan leder

Green funksjon for Δ i området $x > 0$, med grensebetingelse $\Phi = 0$ på flaten $x = 0$.

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'_S|}\right]$$

3.2.3 Speilladningsmetoden: Ledende kule

Speilladning $q' = -(R/|\vec{x}'|)\, q$ i punktet $\vec{x}'_S = (R/|\vec{x}'|)^2\, \vec{x}'$.

3.3 Utvikling i ortogonale funksjoner

3.3.1 Rektangulær boks

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi(\vec{x}), \quad \Phi_{mn}(\vec{x}) = \Phi_m^{(x)}(x)\,\Phi_n^{(y)}(y)\,\Phi_{m,n}^{(z)}(z).$$

3.4 Konform avbildning

Cauchy-Riemann ligningene: $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \implies \partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ og $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x \implies \mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$, $|f|$, og $\mathrm{Arg}\, f$ tilfredsstiller Laplace ligning. Avbild et komplisert område i z-planet til et enklere område i ζ-planet ved en analytisk avbildning $\zeta = \zeta(z)$.

3.4.1 Eksempel: Plan sektor

$$\zeta(z) = z^\nu \implies f(z) = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\log(z^\nu - z_0^\nu) - \log(z^\nu - z_0^{*\,\nu})\right].$$

Kapittel 3

Elektrostatikk i ulike geometrier

3.4 Konform avbildning (forts)

3.4.1 Eksempel: Plan sektor (forts)

3.5 Variasjonsprinsipp for elektrostatiske problemer

Løsninger Φ av Lapalace's ligning (med gitte grensebetingelser) vil minimalisere integralet

$$E\{\Phi\} = \frac{1}{2}\int_V d^3x\ (\nabla\Phi)^2 .$$

Kapittel 4

Fri felt og bølger

4.1 Plane bølger

4.1.1 Sammenhengen mellom $\vec{E}$, $\vec{B}$ og $\hat{k}$

$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0\, f(\hat{k}\cdot\vec{x} - \frac{c}{n}t)$, $\hat{k}\cdot\vec{E}(\vec{x},t) = 0$, $\vec{B}(\vec{x},t) = \frac{n}{c}\,\hat{k}\times\vec{E}(\vec{x},t)$, $n = \sqrt{\varepsilon_r\,\mu_r}$ (brytningsindeksen)

4.1.2 Plane harmoniske bølger. Kompleks notasjon

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\,\vec{E}_0\,\mathrm{e}^{i\omega(\frac{n}{c}\hat{k}\cdot\vec{x} - t)}, \quad \vec{E}_0 \text{ kompleks, ortogonal til } \hat{k}$$

4.1.3 Polarisasjon

$$\vec{E}_0 = |A|\,\mathrm{e}^{i\alpha}\,\hat{e}_1 + |B|\,\mathrm{e}^{i\beta}\,\hat{e}_2 .$$

Linær polarisasjon: $\alpha = \beta$. Sirkulær polarisasjon: $\alpha - \beta = \pm\pi/2$, $|A| = |B|$. Generelt tilfelle for en rent harmonisk bølge er elliptisk polarisasjon. Stokes parametre. Inkoherent lys. Upolarisert lys.

4.2 Refleksjon og brytning

4.2.1 Geometri og notasjon

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{i0}\,\mathrm{e}^{i\omega(\frac{n_1}{c}\hat{k}_i\cdot\vec{x} - t)} + \vec{E}_{r0}\,\mathrm{e}^{i\omega(\frac{n_1}{c}\hat{k}_r\cdot\vec{x} - t)}, \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{t0}\,\mathrm{e}^{i\omega(\frac{n_2}{c}\hat{k}_t\cdot\vec{x} - t)},$$
$$\vec{B}_{i0} = \frac{n_1}{c}\,\hat{k}_i\times\vec{E}_{i0}, \quad \vec{B}_{r0} = \frac{n_1}{c}\,\hat{k}_r\times\vec{E}_{r0}, \quad \vec{B}_{t0} = \frac{n_2}{c}\,\hat{k}_t\times\vec{E}_{t0}.$$

4.2.2 Grensebetingelsene. Snell's brytningslov

$$\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}, \quad B_{2n} = B_{1n}, \quad E_{2t} = E_{1t}, \quad \frac{1}{\mu_2}B_{2t} = \frac{1}{\mu_1}B_{1t}.$$

$\frac{n_1}{c}\hat{k}_i\cdot\vec{x} = \frac{n_1}{c}\hat{k}_r\cdot\vec{x} = \frac{n_2}{c}\hat{k}_t\cdot\vec{x}$ for alle $\vec{x}$ på grenseflaten $\Longrightarrow$ Snell's bryningslov.

FORELEST UKE 7

Kapittel 4

Fri felt og bølger (forts)

4.2 Refleksjon og brytning (forts)

4.2.2 Grensebetingelsene. Snell's brytningslov (forts)

$$n_1 \cos\theta = n_1 \cos\theta_r = n_2 \cos\theta_t, \quad \text{eller} \quad n_1 \sin\psi = n_1 \sin\psi_r = n_2 \sin\psi_t.$$

Totalrefleksjon når $\cos\theta \geq \cos\theta_T \equiv n_2/n_1$.

4.2.3 Refleksjon og brytning av paralellpolarisert lys

$$E_{0r} = \frac{\sin\theta - (\varepsilon_1/\varepsilon_2)\sqrt{\cos^2\theta_T - \cos^2\theta}}{\sin\theta + (\varepsilon_1/\varepsilon_2)\sqrt{\cos^2\theta_T - \cos^2\theta}} E_{0i} = \frac{\cos^2\theta_T \sin\theta - (\mu_2/\mu_1)\sqrt{\cos^2\theta_T - \cos^2\theta}}{\cos^2\theta_T \sin\theta + (\mu_2/\mu_1)\sqrt{\cos^2\theta_T - \cos^2\theta}} E_{0i},$$

$$E_{0t} = \frac{2(\varepsilon_1/\varepsilon_2)\cos\theta_T \sin\theta}{\sin\theta + (\varepsilon_1/\varepsilon_2)\sqrt{\cos^2\theta_T - \cos^2\theta}} E_{0i} = \frac{2(\mu_2/\mu_1)\cos\theta_T \sin\theta}{\cos^2\theta_T \sin\theta + (\mu_2/\mu_1)\sqrt{\cos^2\theta_T - \cos^2\theta}} E_{0i}.$$

4.2.4 Brewster's vinkel

$$\tan^2\theta_B = \frac{\sin^2\theta_T}{\cos^2\theta_T\,[1 - (\mu_1/\mu_2)^2\cos^2\theta_T]}, \qquad \text{Hvis } \mu_1 = \mu_2\text{: } \tan\theta_B = \frac{1}{\cos\theta_T}$$

4.2.5 Refleksjon og brytning av normalpolarisert lys

$$E_{0r} = \frac{\sin\theta - (\mu_1/\mu_2)\sqrt{\cos^2\theta_T - \cos^2\theta}}{\sin\theta + (\mu_1/\mu_2)\sqrt{\cos^2\theta_T - \cos^2\theta}} E_{0i}, \qquad E_{0t} = \frac{2\sin\theta}{\sin\theta + (\mu_1/\mu_2)\sqrt{\cos^2\theta_T - \cos^2\theta}} E_{0i}.$$

4.2.6 Faseskift ved totalrefleksjon (for $\mu_1 = \mu_2$)

Paralellpolarisert lys:

$$\frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\cos^2\theta_T \sin\theta - i\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\theta_T}}{\cos^2\theta_T \sin\theta + i\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\theta_T}}$$

Normalpolarisert lys:

$$\frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\sin\theta - i\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\theta_T}}{\sin\theta + i\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\theta_T}}$$

FORELEST UKE 8

Kapittel 4

Fri felt og bølger (forts)

4.3 Dispersjon

$$\vec{D}(\vec{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \varepsilon(t-t')\, \vec{E}(\vec{x},t'), \quad \vec{B}(\vec{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \mu(t-t')\, \vec{E}(\vec{x},t').$$

Kausalitet $\Longrightarrow$ $\varepsilon(t-t') = 0$ og $\mu(t-t') = 0$ for $t' > t$. Fouriertransformert m.h.p. t:

$$\vec{D}(\vec{x},\omega) = \varepsilon(\omega)\, \vec{E}(\vec{x},\omega), \qquad \vec{B}(\vec{x},\omega) = \mu(\omega)\, \vec{H}(\vec{x},\omega).$$

4.3.1 Bølgeligningen og plane bølger i dispersive medier

Fouriertransform fører til Helmholtz' ligning,

$$\left[\nabla^2 + \varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)\,\omega^2\right] A(\vec{x},t) = 0.$$

Planbølgeløsninger exp $i\omega(\frac{n(\omega)}{c}\,\hat{k}\cdot\vec{x} - t)$ forplanter seg med frekvensavhengig fasehastighet $\frac{c}{n(\omega)}$ og gruppehastighet $\vec{v}_g = \nabla_k \omega(\vec{k})$. En elektromagnetisk puls vil flyte utover (dispersjon) og miste energi til det omgivende medium (dissipasjon).

4.3.2 En enkel molekylær modell for dispersjon

$$m_e \left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) \vec{x} = e\,\vec{E}(t) = e\,\vec{E}_0\, \mathrm{e}^{-i\omega t}.$$

Med løsningsansatzen $\vec{x}(t) = \vec{x}(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ finnes

$$\vec{p}(\omega) \equiv e\vec{x}(\omega) = \left(\frac{e^2}{m_e}\right) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\,\omega}.$$

Dette fører til en frekvensavhengig permittivitet

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \left(\frac{\rho_N\, e^2}{\varepsilon_0 m_e}\right) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\,\omega}\right] \longrightarrow \varepsilon_0 \left[1 + \left(\frac{\rho_N\, e^2}{\varepsilon_0 m_e}\right) \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\gamma_i\,\omega}\right].$$

Oscillatorstyrkene f_i oppfyller summeregelen $\sum_i f_i = Z$. For $\omega \approx \omega_i$ har man *anomal dispersjon* og *resonant absorbsjon*.

Kapittel 4

Fri felt og bølger (forts)

4.3 Dispersjon (forts)

4.3.3 Kramers-Kronig relasjonene (*J.D.J: Ch.7.10*)

Kausalitet medfører en sammenheng mellom real (ε') og imaginærdelen (ε'') til f.eks. permittiviteten:

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty d\omega'\,\frac{\omega'\,\varepsilon''(\omega')}{\omega^2-\omega'^2}, \qquad \varepsilon''(\omega) = \frac{2\omega}{\pi}\mathcal{P}\int_0^\infty d\omega'\,\frac{\varepsilon'(\omega')-\varepsilon_0}{\omega^2-\omega'^2}.$$

4.3.4 Bølger i ledende medier (*J.D.J: Ch.7.7*)

Den fenomenologiske Maxwell-ligningen (Fourier-transformert med hensyn på tiden),

$$\nabla\times\vec{H}(\omega) + i\omega\,\varepsilon(\omega)\,\vec{E}(\omega) = \vec{\jmath}(\omega) = \sigma(\omega)\,\vec{E}(\omega),$$

kan omskrives slik at ledningsevnen $\sigma(\omega)$ inkluderes i permittiviteten:

$$\nabla\times\vec{H}(\omega) + i\omega\,\varepsilon_{eff}(\omega)\,\vec{E}(\omega) = 0, \qquad \text{der} \qquad \varepsilon_{eff}(\omega) = \varepsilon(\omega)\left(1 + i\frac{\sigma(\omega)}{\omega\,\varepsilon(\omega)}\right)$$

Kapittel 5

Energi og impuls i det elektromagnetiske felt

5.1 Kontinuumsformulering av Newton's og Lorentz' lover

Newtons' lov og Lorentz' kraftlov for partikler:

$$\frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_n = q_n\left(\vec{E} + \vec{v}_n\times\vec{B}\right).$$

Energi tilført pr. tidsenhet:

$$\frac{dU_n}{dt} = \vec{F}_n\cdot\vec{v}_n = q_n\,\vec{E}\cdot\vec{v}_n.$$

Dette blir i kontinuumsformulering, med

$$\rho(\vec{x},t) = \sum_n q_n\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_n(t)), \quad \vec{\jmath}(\vec{x},t) = \sum_n q_n\,\vec{v}_n(t)\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_n(t)),$$
$$u_{Mat}(\vec{x},t) = \sum_n U_n(t)\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_n(t)), \quad \vec{S}_{Mat}(\vec{x},t) = \sum_n U_n(t)\,\vec{v}_n(t)\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_n(t)),$$
$$\vec{p}(\vec{x},t) = \sum_n \vec{p}_n(t)\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_n(t)), \quad \vec{f}(\vec{x},t) = \sum_n \vec{F}_n(t)\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_n(t)).$$

$$\frac{d}{dt}\,u_{Mat}(\vec{x},t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\,u_{Mat}(\vec{x},t) + \nabla\cdot\vec{S}_{Mat}(\vec{x},t) = \vec{E}\cdot\vec{\jmath},$$
$$\frac{d}{dt}\,p(\vec{x},t) = \vec{f}(\vec{x},t) = \rho\,\vec{E} + \vec{\jmath}\times\vec{B}.$$

Kapittel 5

Energi og impuls i det elektromagnetiske felt (forts)

5.2 Energibalanse

Endringen i materiens energi-innhold, $du_M/dt = \vec{E}\cdot\vec{j}$, må balanseres av en tilsvarende endring i den elektromagnetiske energien,

$$\frac{du_{EM}}{dt} = \left(\frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{S}_{EM}\right) = -\vec{E}\cdot\vec{j},$$

med $u_{EM} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)$, og Pointing vektor $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$.

5.2.1 Eks: Energitetthet og energistrøm i en plan harmonisk bølge

$$u_{EM} = \frac{1}{2}\varepsilon|\vec{E}|^2, \qquad \vec{S}_{EM} = \frac{c}{n}u_{EM}\,\hat{k}$$

5.3 Impulsbalanse

Endringen i materiens impuls-innhold, $d\vec{g}_M/dt = \vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}$, må balanseres av en tilsvarende endring i den elektromagnetiske impulsen

$$\frac{\partial g^j_{EM}}{\partial t} + f^j = \partial_i T^{ji},$$

med impulstetthet $\vec{g} = \vec{D}\times\vec{B} = \frac{n}{c}\vec{S}_{EM}$ og (Maxwells) spenningstensor $T^{ij} = D^iE^j + B^iH^j - \delta^{ij}u_{EM}$.

Kapittel 6

Stråling

6.1 Stråling fra lokaliserte kilder

6.1.1 Lorentz betingelsen, $\vec{A}$-feltet, og $\vec{B}$-feltet for store r.

$$\vec{A}(\vec{x},\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\vec{\jmath}(\vec{k},\omega)\,\mathrm{e}^{ikr}, \quad \vec{B}(\vec{x},\omega) \approx i\frac{\mu_0}{4\pi r}\left(\vec{k}\times\vec{\jmath}_\perp(\vec{k},\omega)\right)\mathrm{e}^{ikr}, \quad \vec{x} = r\,\hat{n}, \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c}\hat{n}.$$

6.1.2 $\vec{E}$-feltet for store r.

Fra $\partial\vec{D}/\partial t = \nabla\times\vec{H}$ fås

$$-i\omega\varepsilon_0\vec{E}(\vec{x},\omega) = \mu_0^{-1}\nabla\times\vec{B}(\vec{x},\omega) \quad\Longrightarrow\quad \vec{E}(\vec{x},\omega) \sim -\frac{c}{\omega}\left(\vec{k}\times\vec{B}(\vec{x},\omega)\right)$$

FORELEST UKE 11

Kapittel 6

Stråling (forts)

6.1 Stråling fra lokaliserte kilder (forts)

6.1.3 Pointing-vektor. Frekvensfordeling av totalt utstrålt energi

Pointingvektoren er gitt som

$$\vec{S}(\vec{x},t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(\vec{x},t)\times\vec{B}(\vec{x},t) = \frac{1}{\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega_1}{2\pi}\vec{E}(\vec{x},\omega_1)\,\mathrm{e}^{-i\omega_1 t}\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega_2}{2\pi}\vec{B}(\vec{x},\omega_2)\,\mathrm{e}^{-i\omega_2 t}.$$

Energistrømmen gjennom et et flateelement $d\vec{\sigma}$, integrert over alle tider, kan da skrives som

$$d\mathcal{U} = \int_{-\infty}^{\infty} dt\; d\vec{\sigma}\cdot\vec{S}(\vec{x},t) = \frac{1}{\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\,d\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{E}(\vec{x},\omega)\times\vec{B}(\vec{x},-\omega)\right)$$

Innsatt for strålingsfeltene $\vec{E}(\vec{x},\omega)$ og $\vec{B}(\vec{x},-\omega)$ fås et uttrykk for frekvens- og vinkelfordeling av totalt utstrålt energi:

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\Omega\,d\omega} = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c}\times\frac{\omega^2}{2\pi}\times|\vec{\jmath}_\perp(\vec{k},\omega)|^2$$

6.1.4 Utstråling fra tidsharmonisk kilde med frekvens ω_0

Utstrålt energi pr. tidsenhet (dvs. effekt)

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{\mu_0\,\omega_0^2}{32\pi^2 c}\,|\vec{\jmath}_\perp(\vec{k})|^2$$

(Minner om at $\vec{\jmath}_\perp(\vec{k})$ er projeksjonen av $\vec{\jmath}(\vec{k})$ orthogonalt på $\vec{k}$.)

6.2 Utstråling fra dipolantenne

$$\vec{\jmath}(\vec{k}) = I_0\times\frac{2}{k_0\,\sin^2\theta}\left(\cos\left(\frac{1}{2}k_0 d\right) - \cos\left(\frac{1}{2}k_0 d\cos\theta\right)\right)\hat{e}_z$$

der $k_0 \approx \omega_0/c$, $\vec{k} = k_0\,\hat{k}$, og $\cos\theta = \hat{k}\cdot\hat{e}_z$.

FORELEST UKE 12

Kapittel 6

Stråling (forts)

6.3 Dipoltilnærmelsen

Tilnærmer eksponensialfunksjonen med 1 (god tilnærming når kildens utstrekning er mye mindre enn bølgelengden til strålingen), og bruker strømkonservering:

$$\int d^3x\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \vec{\jmath}(\vec{x},\omega_0) \approx \int d^3x\, \vec{\jmath}(\vec{x},\omega_0) = -i\,\omega_0\,\vec{p}_0,$$

der p_0 er (amplituden til det harmonisk tidsvarierende) dipolmomentet til ladningsfordelingen. Vinkelfordeling av utstrålt energi pr. tidsenhet blir i dipoltilnærmelsen:

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{\mu_0\,\omega_0^4}{32\pi^2 c}\,|\vec{p}_0|^2\,\sin^2\theta$$

6.4 Thomson-spredning

Differensielt spredningstverrsnitt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(Thomson)} = r_e^2\,\sin^2\theta, \quad \text{der } r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, m_e\, c^2} \text{ er den klassiske elektronradius}$$

Ved integrasjon over vinklene finnes totalt spredningstverrsnitt:

$$\sigma^{(Thomson)} = \frac{8\pi}{3}\,r_e^2$$

6.5 Strålingsreaksjonen

6.5.1 Utstrålt effekt fra en (ikke-relativistisk) akselerert partikkel

Utstrålt energi pr. tidsenhet fra en ladning e som undergår en aksellerasjon $\vec{a}$, i ikke-relativistisk tilnærmelse:

$$\mathcal{P} = \frac{e^2}{6\pi\,\varepsilon_0\,c^3}\,a^2$$

Dette uttrykket er egentlig utledet under antagelse om periodisk bevegelse (tidsmidlet over en periode).

FORELEST UKE 13

Kapittel 6

Stråling (forts)

6.5 Strålingsreaksjonen (forts)

Strålingsreaksjonen på et aksellerert elektron:

$$\vec{F}_r = \frac{2}{3} m_e \left(\frac{r_e}{c}\right) \frac{d}{dt}\vec{a}, \quad \text{der } r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, m_e\, c^2} \text{ er den klassiske elektronradius}$$

6.5.2 Abraham-Lorentz ligning

$$m_e\, \vec{a} = \vec{F}_{ytre} + \frac{2}{3}\, m_e\, \tau_e \frac{d}{dt}\vec{a}, \quad \text{med } \tau_e = r_e/c.$$

6.5.3 Naturlig linjebredde

$$\frac{dU}{d\omega} \sim \frac{\omega_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}, \quad \text{med } \gamma \approx \frac{2}{3}\, \tau_e\, \omega_0^2.$$

6.6 Spredning av lys på bundne elektroner (Rayleigh spredning)

Differensielt spredningstverrsnitt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(Rayleigh)} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{(Thomson)} \times \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma'^2\, \omega^2}, \quad \text{med } \gamma' = \frac{2}{3}\, \tau_e\, \omega^2$$