NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
Finn Bakke, tlf. 93646

KONTINUASJONSEKSAMEN I FAG 74316
ELEKTRISITET OG MAGNETISME 2

17. august 1999
kl. 0900 - 1300

Tillatte hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken

Maxwells ligninger med supplerende relasjoner

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\qquad \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q = \iiint_V \rho \, d\tau$ $\qquad$ (V avgrenset av S)

$\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\qquad \oint_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = -\iint_S \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ $\qquad$ (S omsluttet av Γ)

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\qquad \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\qquad \oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_c + I_d = \iint_S (\mathbf{J}_c + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S}$ $\qquad$ (S omsluttet av Γ)

$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ $\qquad \mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ $\qquad \mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$ $\qquad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$

$\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho_f + \rho_b)/\varepsilon_0 = (\nabla \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{P})/\varepsilon_0$ $\qquad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$

I isotrope, lineære media: $\qquad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ $\qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

Andre relasjoner $\qquad \Phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $\qquad \mathbf{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ $\qquad \mathbf{J} = g\mathbf{E}$

$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ $\qquad d\Phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ $\qquad d\mathbf{F} = I \, d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}$ $\qquad d\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0 I \, d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$

$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ $\qquad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ $\qquad U_e = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ $\qquad U_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$

$\mathbf{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\mathbf{e}_r 2p\cos\theta + \mathbf{e}_\theta p \sin\theta)$ $\qquad \mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi r^3}(\mathbf{e}_r 2m\cos\theta + \mathbf{e}_\theta m \sin\theta)$

$U_e = \Sigma \frac{1}{2} q_i \Phi_i$ $\qquad \Phi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$ $\qquad U_m = \Sigma \frac{1}{2} I_i \phi_i$ $\qquad \phi_i = \sum_j M_{ij} I_j$

$L_i = \phi_{ii}/I_i$ $\qquad M_{ij} = \phi_{ij}/I_j$ $\qquad u_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}$ $\qquad u_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$

$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ $\qquad \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$

$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r(-A_1 + 2C_1 r^{-3})\cos\theta + \mathbf{e}_\theta(A_1 + C_1 r^{-3})\sin\theta$

$\Phi = RI \qquad R = \oint \frac{dL}{gA} \qquad NI = \mathcal{R}\Phi \qquad \mathcal{R} = \oint \frac{dL}{\mu A}$

$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma \qquad \mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t} \qquad \mathbf{K} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \qquad \mathbf{K} \times \mathbf{n} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)_t$

$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \qquad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \qquad Q = \frac{\omega\varepsilon}{g} = \left| \frac{\partial \mathbf{D}/\partial t}{\mathbf{J}} \right|$

$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu g \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad k_r = \omega (\mu\varepsilon/2)^{1/2} [(1+1/Q^2)^{1/2} + 1]^{1/2}$

$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu g \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad k_i = \omega (\mu\varepsilon/2)^{1/2} [(1+1/Q^2)^{1/2} - 1]^{1/2}$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\right) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \qquad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \qquad \mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{v^2} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_o \mathbf{J}$

$\Phi(\mathbf{r},t) = \iiint_\tau \frac{[\rho]\, d\tau}{4\pi\varepsilon_o |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \iiint_\tau \frac{\mu_o [\mathbf{J}]\, d\tau}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$

$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o s} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_o Q \mathbf{v}}{4\pi s} \qquad s = R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c} \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{E}}{Rc}$

$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o s^3}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(\mathbf{R} - \frac{R \cdot \mathbf{v}}{c}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o s^3 c^2}\left[\mathbf{R} \times \left\{\left(\mathbf{R} - \frac{R \cdot \mathbf{v}}{c}\right) \times \dot{\mathbf{v}}\right\}\right]$

$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \qquad \beta = v/c \qquad p = h/\lambda \qquad E = hf \qquad p = v\,E/c^2 \qquad E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$

$x' = \gamma(x - \beta ct) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c} x\right)$

$E_\parallel' = E_\parallel \qquad B_\parallel' = B_\parallel \qquad \mathbf{E}_\perp' = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad \mathbf{B}_\perp' = \gamma\left(\mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c^2}\, \mathbf{v} \times \mathbf{E}\right)$

Fysiske konstanter

Lyshastighet i vakuum	c	$3.00 \cdot 10^8$ m/s	
Elementærladning	e	$1.60 \cdot 10^{-19}$ C	
Elektronets masse	m_e	$9.11 \cdot 10^{-31}$ kg	
Protonets masse	m_p	$1.67 \cdot 10^{-27}$ kg	
Permittivitet i vakuum	ε_o	$8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m	
Permeabilitet i vakuum	μ_o	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m	$\varepsilon_o\mu_o = 1/c^2$

Vektorformler

$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

$\nabla \times \nabla u = 0$

$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

$$\frac{d}{d\sigma}(u\mathbf{A}) = \frac{du}{d\sigma}\mathbf{A} + u\frac{d\mathbf{A}}{d\sigma}$$
$$\frac{d}{d\sigma}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{d\sigma}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{d\sigma}$$
$$\frac{d}{d\sigma}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{d\sigma}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{d\sigma}$$
$$\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v$$
$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$$
$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$$
$$\nabla(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{C}\text{, hvor } \mathbf{C} = \mathbf{konst.}$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$$
$$\nabla\cdot(u\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot(\nabla u) + u(\nabla\cdot\mathbf{A})$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$$
$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$$
$$\nabla\times(u\mathbf{A}) = (\nabla u)\times\mathbf{A} + u(\nabla\times\mathbf{A})$$
$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\nabla\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{A} - (\nabla\cdot\mathbf{A})\,\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{B}$$
$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

hvor:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\cdot\nabla)B = {} & \mathbf{e}_x\left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\\ & + \mathbf{e}_y\left(A_x\frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\\ & + \mathbf{e}_z\left(A_x\frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

Vektoroperasjoner. Rektangulære koordinater.

$$\nabla u = \mathbf{e}_x\frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \mathbf{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Vektoroperasjoner. Sylindriske koordinater.

$$\nabla u = \mathbf{e}_\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_\phi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) + \mathbf{e}_z\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right]$$
$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Vektoroperasjoner. Sfæriske koordinater.

$$\nabla u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mathbf{e}_r}{r \sin\theta} [\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}] + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} [\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi)] + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} [\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}]$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$$

Vektor integralformler.

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, d\tau \qquad \text{(Divergensteoremet)}$$

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} \qquad \text{(Stokes' teorem)}$$

$$\oint_S u\, d\mathbf{a} = \int_V \nabla u\, d\tau$$

$$\oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{a} = -\int_V (\nabla \times \mathbf{A})\, d\tau$$

$$\oint_C u\, d\mathbf{s} = -\int_S \nabla u \times d\mathbf{a}$$

$$\oint_S u\mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_V [\mathbf{A} \cdot (\nabla u) + u(\nabla \cdot \mathbf{A})]\, d\tau$$

$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}) = \int_V [(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})]\, d\tau$$

Formler med relative koordinater.

$$\frac{\partial f(\mathbf{R})}{\partial x} = -\frac{\partial f(\mathbf{R})}{\partial x'}$$

$$\nabla f(\mathbf{R}) = -\nabla' f(\mathbf{R})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) = -\nabla' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R})$$

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{R}) = -\nabla' \times \mathbf{A}(\mathbf{R})$$

$$\nabla^2 f(\mathbf{R}) = \nabla'^2 f(\mathbf{R})$$

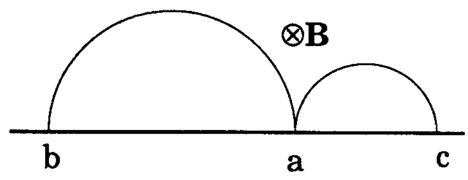
$$\nabla R = -\nabla' R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \mathbf{e}_R$$

$$\nabla(\frac{1}{R}) = -\nabla'(\frac{1}{R}) = -\frac{\mathbf{e}_R}{R^2} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

$$\nabla^2(\frac{1}{R}) = \nabla'^2(\frac{1}{R}) = 0 \qquad (R \neq 0)$$

Oppgave 1.

To ladede partikler , B og C, kommer samtidig inn i et magnetfelt **B** ved punkt a i figuren. Magnetfeltet står vinkelrett på papirplanet, og peker inn i det. Partiklene har samme masse. Den ene har ladning Q og den andre –Q. Etter å ha beveget seg i en halvsirkel når partikkel B fram til punkt b og partikkel C når fram til punkt c.

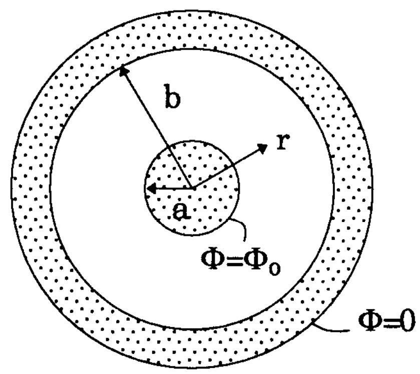


- Hvilken av partiklene har positiv ladning, og hvilken har negativ?
- Hvilken har størst hastighet?
- Hvilken når først fram til endepunktet?

Begrunn svarene.

Oppgave 2.

Gitt en koaksialkabel, med en innerleder med radius a, og ytterleder med indre radius b. Tykkelsen av ytterlederen har ingen betydning. Inner- og ytterleder er ikke forbundet med hverandre. Mellom lederne er det vakuum. Kabelen er så lang at vi kan se bort fra effekter nær endene.
Mellom lederne påtrykkes en potensialforskjell Φ_0, slik at potensialet på innerlederen er $\Phi(a)=\Phi_0$ og på ytterlederen $\Phi(b)=0$.



For å unngå forveksling med ladningstettheten ρ, benyttes r istedenfor ρ som sylinderkoordinat .

(a) Finn **E**-feltet og potensialet Φ over alt i rommet.

Mellomrommet mellom lederne fylles nå med romladningstetthet ρ(r) , slik at potensialet mellom lederne ikke lenger er som i pkt. (a), men gitt av:

$$\Phi(r) = \Phi_0 \frac{b-r}{b-a}$$

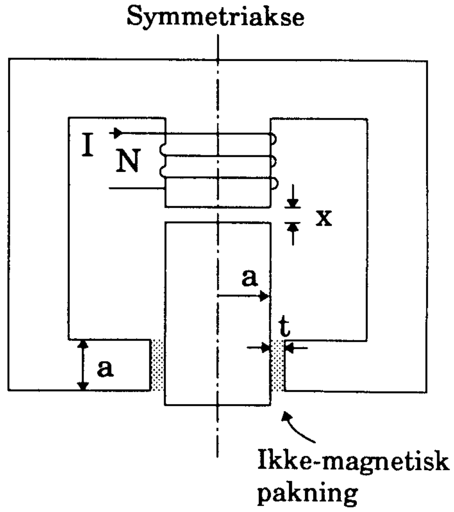
Potensialet varierer altså lineært fra $\Phi(a)=\Phi_0$ til $\Phi(b)=0$.

(b) Finn **E**(r) og ρ(r) i området mellom lederne.

(c) Finn lagret elektrostatisk energi pr. lengdeenhet av koaksialkabelen, w_e .

Oppgave 3 .

Figuren viser et snitt gjennom en magnetisk krets. Kjernen og stemplet har sylindersymmetri, med symmetriakse som vist. Materialet i kjernen og stempelet antas å ha uendelig permeabilitet ($\mu_r=\infty$). Gapene antas så små at **B**-feltene i dem kan antas homogene. Antall tørn i spolen er N, og strømmen gjennom den er I.



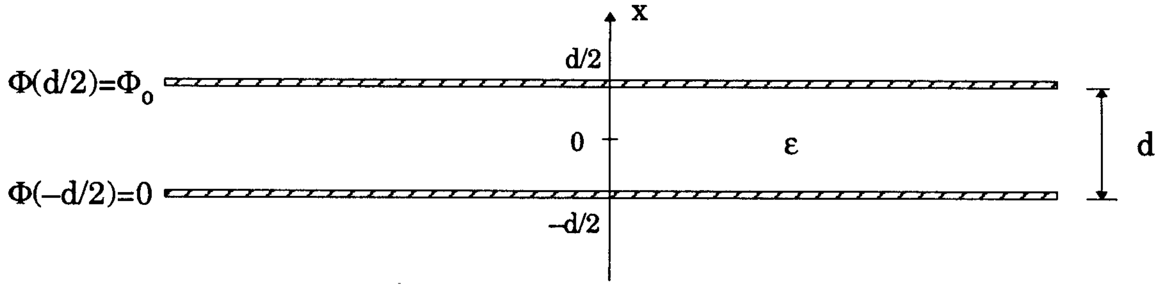
(a) Beregn spolens selvinduktans L.

(b) Bestem B i luftgap og i pakning.

(c) Finn systemets totale magnetiske energi W_m.

(d) Stemplet glir friksjonsfritt og har masse m. Bestem strømmen I som skal til for at den magnetiske kraften akkurat skal motvirke tyngdekraften. Tyngdeakselerasjonen er g.

Oppgave 4.



Rommet mellom platene i en kondensator er fylt av et dielektrikum. Avstanden mellom platene er d og denne er mye mindre enn platenes utstrekning, slik at vi kan regne som om platene er uendelig store. Potensialforskjellen mellom platene er Φ_0 .

(a) Anta først at dielektrikumet har permittivitet ε_1 = konstant.

Bestem **E**- og **D**-felt, polarisasjon **P** og potensial Φ som funksjon av x.

(b) I det følgende skal antas at permittiviteten varierer med x etter funksjonen:

$$\varepsilon_2(x) = \varepsilon_0 \cdot \frac{4}{1+(x/d)^2}$$

Vil **D**-feltet være konstant i mellomrommet? Begrunn svaret.
Bestem de samme størrelser som i pkt. (a).

(c) Bestem den bundne romladningstettheten ρ_b inne i det dielektriske materialet, og bundet flateladningstetthet σ_b ved kondensatorplatene.