NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
Hans M. Pedersen, tlf. 93587

Eksamen i Fag SIF 4060: Elektromagnetisk teori

Torsdag 25. november 1999
kl. 09.00-13.00

Tillatte hjelpemidler: B2- Typeodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste.
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken
OBS: Se også oppgitte uttrykk: Side 4 og 5.

Oppgave 1

a) Vis at potensialet fra en uendelig lang linjeladning er

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln r + A,$$

hvor r er avstand fra linjeladningen, λ er ladning pr. lengdeenhet og A er en integrasjonskonstant.

b) Finn et uttrykk for kapasitans pr. lengdeenhet C' for en koaksialkabel hvor innerlederen har radius r_1 og ytterlederen har innvendig radius r_2. Bestem også kabelens selvinduktans pr. lengdeenhet L' når vi antar ideelle ledere, slik at: $C'L' = \mu\varepsilon$, hvor μ og ε er permeabilitet og permittivitet for materialet mellom lederne .

c) Koaksialkabelen i b) utgjør en elektrisk transmisjonslinje. Tegn opp ekvivalentskjema for et infinitisimalt stykke dx av linjen når lederne antas ideelle (null resistans). Vis at strøm $I(x,t)$ og spenning $V(x,t)$ må oppfylle ligningene:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L'\frac{\partial I}{\partial t}, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = -C'\frac{\partial V}{\partial t}.$$

d) Vis at strøm I og spenning V i c) tilfredsstiller samme bølgeligning, og at denne har monofrekvente løsninger av type: $V = V_0 \exp[i(kx - \omega t)]$ og $I = I_0 \exp[i(kx - \omega t)]$. Bestem fasehastigheten og bølgeimpedansen $z_0 = V_0/I_0$. Gi tallsvar for $r_1 = 0.5$ mm, $r_2 = 4$ mm, $\mu = \mu_0$ og $\varepsilon = 2\varepsilon_0$.

Oppgave 2

a) Vis at ladningsbevarelsen følger direkte av Maxwells ligninger.

I ledende materialer er strømtettheten gitt som: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, hvor σ er materialets konduktivitet (ledningsevne). Anta at vi i et ledende materiale har en ladningsfordeling $\rho_0(\mathbf{r})$ ved tid $t = 0$. Beregn $\rho(\mathbf{r},t)$ for $t \geq 0$.

Forklar hvorfor man ikke finner fri ladninger i det indre av ledende materialer.

b) Maxwells ligninger medfører at elektrisk felt i et ledende materiale oppfyller bølgeligningen:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Vis at denne har planbølgeløsninger av formen:

$$\mathbf{E}(z,t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 \exp[i(\tilde{k}z - \omega t)]$$

hvor $\tilde{\mathbf{E}}_0$ er en kompleks feltamplitude og $\tilde{k}$ er et komplekst bølgetall. Bestem dispersjonsrelasjonen: $\tilde{k} = \tilde{k}(\omega)$, og vis at realdelen k og imaginærdelen κ er gitt ved:

$$k = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} + 1\right]} \quad \text{og} \quad \kappa = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1\right]}.$$

c) Finn forenklede uttrykk for fasehastighet, gruppehastighet og inntrengningsdybden ("skin depth") $\delta = 1/\kappa$, for de to grensetilfellene: $\omega << \omega_0$ og $\omega << \omega_0$, hvor $\omega_0 = \sigma/\varepsilon$.

d) Frekvensen er $\nu = \omega/2\pi = 1$ MHz. Beregn $\nu_0 = \omega_0/2\pi$, fasehastigheten, gruppehastigheten, inntrengningsdybden og bølgelengden i et ledende materiale hvor: $\varepsilon = 2\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ og $\sigma = 1\ (\Omega\mathrm{m})^{-1}$. Hva er bølgelengden i vakuum ved samme frekvens?

Oppgave 3

a) Vis at i vakuum kan potensialet i stor avstand fra en elektrisk dipol med konstant dipolmoment **p**, uttrykkes ved:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

b) Bestem **E** -feltet fra dipolen i a).

c) I stor avstand fra en dipol med tidsavhengig dipolmoment $\mathbf{p}(t)$ er skalarpotensialet $V(\mathbf{r},t)$ og vektorpotensialet $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ gitt ved:

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{p}(t_0)\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_0)\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 c r^2} \quad \text{og} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0\dot{\mathbf{p}}(t_0)}{4\pi r},$$

hvor $t_0 = t - r/c$ og $\dot{\mathbf{p}}(t) = \dfrac{d\,\mathbf{p}(t)}{dt}$.

Bestem **E** og **B** i bølgesonen, dvs. for så store r at vi kan neglisjere alle andre bidrag enn de som går mot null som $\sim 1/r$ når $r \to \infty$. Vis at Poyntings vektor er radielt rettet.

d) Vis at for plane, tidsharmoniske, elektromagnetiske bølger i vakuum har vi alltid:

$$\omega\mathbf{B} = \mathbf{k}\times\mathbf{E} \quad \text{og} \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0.$$

****

Oppgitt:

- **Maxwells ligninger, differensiell form:**

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho \qquad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \qquad \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

- **Maxwells ligninger, integralform:**

Gauss' lov for det elektriske feltet: $\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=q$ = ladning innenfor flaten S

Gauss' lov for det magnetiske feltet: $\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0.$

Faradays induksjonslov: $\oint_\gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=-\frac{d\Phi}{dt}$, $\Phi=\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$ (flate S avgrenset av kurve γ)

Ampères lov: $\oint_\gamma \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s}=I_C+I_D;\begin{cases} I_D=\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\text{forskyvningsstrøm} \\ I_C=\iint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=\text{ledningsstrøm gjennom } S \end{cases}$

- **Lorentzkraften: $\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$**
- **Materialrelasjoner (lineære, isotrope materialer):**

  $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$, $\mathbf{P}=\chi_e\varepsilon_0\mathbf{E}$, gir: $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$, $\varepsilon=\varepsilon_0(1+\chi_e)$, χ_e = elektrisk susceptibilitet

  $\mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu_0-\mathbf{M}$, $\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H}$, gir: $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, $\mu=\mu_0(1+\chi_m)$, χ_m = magnetisk susceptibilitet

- **Ladningsbevarelse:** $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}=0$
- **Energibevarelse (Poyntings sats):** $\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{S}=0$,

  $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ = Poyntings vektor

  $u=u_e+u_m=\frac{1}{2}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})$ = elektrisk og magnetisk energitetthet

- **Elektromagnetisk impuls: $\mathbf{p}_{em}=\int(\mathbf{D}\times\mathbf{B})d^3r$, $\mathbf{D}\times\mathbf{B}=\varepsilon\mu\mathbf{S}$ = impulstetthet**

- **Elektrodynamiske potensialer: $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$.**

  Maxwells lign. er tilfredsstilt når potensialene oppfyller:

  $$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\,\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right),$$

  $$\nabla^2 V - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}\right).$$

  Ligningene kan dekoples ved justeringstransformasjoner ("gauge transforms").

- **Lyshastighet og planbølgeimpedans i vakuum:**

  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \approx 3\cdot10^8$ m/s og $E/H = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi\,\Omega$

- **Matematikk:**

  $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

  $\nabla\times(V\mathbf{A}) = V(\nabla\times\mathbf{A}) + \nabla V\times\mathbf{A}$

  $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

  $\nabla\times(\nabla V) \equiv 0,\ \ \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) \equiv 0.$

  Gradient, divergens og Laplaceoperator i kulekoordinater:

  $$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

  $$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

  $$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$