

NORGES TEKNISK- NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Hans M. Pedersen, tlf. 93587 (mobil: 48 26 55 19)

Eksamen TFY 4240: Elektromagnetisk teori

Onsdag 3. desember, 2003

kl. 09.00-15.00

Tillatte hjelpemidler: C - Spesifiserte trykte hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Rottmann: Matematisk Formelsamling (alle språkutgaver)

Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken

Se også oppgitte formler side 5-8.

Sensur: 5. januar 2004

[Der svaret er oppgitt kreves det at utledningene gjennomføres skikkelig, og at det klart fremgår om en størrelse er en vektor eller skalar.]

Oppgave 1

- a) Vis at Maxwells ligninger medfører at ladningen er bevart.

I ledende materialer er strømtettheten gitt som: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, hvor σ er materialets konduktivitet (ledningsevne). Anta at vi i et ledende materiale har en gitt ladningsfordeling $\rho_0(\mathbf{r})$ ved tid $t = 0$. Beregn $\rho(\mathbf{r}, t)$ for $t \geq 0$, og vis at $\rho(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0$ etter kort tid.

Gi en fysisk forklaring på hvorfor man ikke finner frie ladninger i det indre av ledende materialer.

- b) Poyntings vektor $\mathbf{S}$ og elektromagnetisk energitetthet u er gitt ved, henholdsvis,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad \text{og} \quad u = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + B^2 / \mu_0).$$

Vis at:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0.$$

[Hint: Beregn $\nabla \cdot \mathbf{S}$ ved bruk av oppgitt produktregel (6) og Maxwells ligninger.]

Forklar betydningen av denne ligningen, og av hvert av de tre leddene på venstre side.

- c) Skriv opp Maxwells ligninger for et umagnetisk, ledende materiale og vis at det elektriske feltet oppfyller bølgeligningen

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \sigma \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Denne har planbølgeløsninger av typen $\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 \exp[i(\tilde{k}z - \omega t)]$ hvor $\tilde{k}$ er et komplekst bølgetall. Bestem dispersjonsrelasjonen ($\tilde{k}$ som funksjon av ω).

- d) Vis at vi tilnærmet har

$$\tilde{k} \cong \begin{cases} \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} + i \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}}; & \text{for } \omega \gg \sigma / \epsilon \\ (1 + i) \sqrt{\frac{\sigma \mu_0 \omega}{2}} & ; \text{for } \omega \ll \sigma / \epsilon. \end{cases}$$

Bestem fasehastighet, gruppehastighet, eksponensiell dempningslengde ("skin depth") og bølgelengde for de to grensetilfellene.

Hvor stor dempning har man pr. bølgelengde når $\omega \ll \sigma / \epsilon$?

Oppgave 2

I kulekoordinater, og med rotasjonssymmetri om z akse, er den generelle løsningen av Laplaces ligning gitt ved,

$$V(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_m r^m + \frac{B_m}{r^{m+1}} \right) P_m(\cos \theta),$$

hvor de første Legendrepolynomene er: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, .. osv.

Anta at en jordnet, ledende kule, med radius R og sentrum i origo, er plassert i et ellers homogent elektrisk felt med potensial $V_0 = -E_0 z$. Dette uperturberte potensialet blir modifisert når kulen er tilstede.

- a) Hvilke randverdier må løsningen $V(r, \theta)$ oppfylle?

Bruk disse til å vise at det resulterende potensialet er

$$V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta.$$

- b) Flateladningstettheten på en leder er gitt ved $\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$.

Beregn flateladningstettheten som induseres på kulen.

- c) Forklar hvordan man kan bruke speilingsmetoden til å løse elektrostatiske problemer.

En punktladning q er plassert på z aksen i avstand a over et uendelig stort, ledende plan i $z = 0$.

Bruk speilingsmetoden til å beregne potensialet i halvrommet $z \geq 0$.

- d) Beregn den indusert ladningstettheten og total indusert ladning i planet $z = 0$.

Oppgave 3

- a) Vis at kapasitans pr. lengdeenhet for en koaksialkabel hvor innerlederen har radius r_1 og ytterlederen har radius r_2 ($> r_1$), er gitt ved:

$$C' = \frac{\lambda}{\Delta V} = 2\pi\epsilon / \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

hvor λ er ladning pr. lengdeenhet, ΔV er potensialdifferansen mellom lederne og ϵ er elektrisk permittivitet til materialet mellom lederne. (Hint: Beregn felt og potensial for en linjeladning og bruk entydighetsteoremet.)

Bestem også kabelens selvinduktans pr. lengdeenhet L' når vi antar ideelle ledere, slik at $C'L' = \mu\epsilon$, hvor μ er magnetisk permeabilitet for materialet mellom de to lederne.

Gi tallsvar for $r_1 = 0.5$ mm, $r_2 = 4$ mm, $\mu = \mu_0$ og $\epsilon = 2\epsilon_0$.

- b) Koaksialkabelen over utgjør en elektrisk transmisjonslinje.

Tegn opp ekvivalentskjema for et infinitesimalt stykke dx av transmisjonslinjen når de to lederne antas ideelle (null resistans). Bruk dette til å vise at strøm- og spenningsvariasjonene $I(x, t)$ og $V(x, t)$ oppfyller de koblede ligningene

$$\frac{\partial V}{\partial x} + L' \frac{\partial I}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial x} + C' \frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

og at de begge oppfyller en bølgeligning av vanlig form.

- c) Anta at transmisjonslinjen overfører et monofrekvent signal

$$V(x, t) = \text{Re}[V(x) \exp(-i\omega t)] \quad \text{og} \quad I(x, t) = \text{Re}[I(x) \exp(-i\omega t)],$$

hvor $V(x)$ og $I(x)$ er komplekse spennings- og strømamplituder.

Hvilke ligninger oppfyller disse?

Bestem fasehastigheten og bølgeimpedansen z_0 for en bølge $V^+(x)$ og $I^+(x)$ som forplantes i $+x$ retning. Gi tallsvar for parameterene oppgitt i a).

Hva er impedansen for en bølge $V^-(x)$ og $I^-(x)$ i $-x$ retning?

- d) Med refleksjon fra enden av linjen har vi bølger i begge retninger:

$$V(x) = V^+(x) + V^-(x) \quad \text{og} \quad I(x) = I^+(x) + I^-(x).$$

Vis at totalimpedansen er $Z(x) \equiv \frac{V(x)}{I(x)} = z_0 \frac{1 + \rho(x)}{1 - \rho(x)}$, hvor z_0 er bølgeimpedansen og

$$\rho(x) = \frac{V^-(x)}{V^+(x)} = -\frac{I^-(x)}{I^+(x)} \quad \text{er en lokal refleksjonskoeffisient.}$$

Finn refleksjonskoeffisienten ved enden av linjen uttrykt ved lastimpedansen Z_{last} og bølgeimpedansen z_0 . Gi tallsvar for $Z_{\text{last}} = 100\Omega$ og parameterene oppgitt ovenfor.

Oppgitt:

VECTOR DERIVATIVES**Cartesian.** $d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = dx dy dz$

$$\text{Gradient :} \quad \nabla t = \frac{\partial t}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Divergence :} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\text{Curl :} \quad \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Laplacian :} \quad \nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}; \quad d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

$$\text{Gradient :} \quad \nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\text{Divergence :} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned} \text{Curl :} \quad \nabla \times \mathbf{v} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned}$$

$$\text{Laplacian :} \quad \nabla^2 t = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds \hat{\mathbf{s}} + s d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz \hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = s ds d\phi dz$

$$\text{Gradient :} \quad \nabla t = \frac{\partial t}{\partial s} \hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Divergence :} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\text{Curl :} \quad \nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Laplacian :} \quad \nabla^2 t = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial t}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

$$(1) \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$(2) \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

Product Rules

$$(3) \quad \nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$$

$$(4) \quad \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

$$(5) \quad \nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

$$(6) \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$(7) \quad \nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$$

$$(8) \quad \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

Second Derivatives

$$(9) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$(10) \quad \nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$(11) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

FUNDAMENTAL THEOREMS

Gradient Theorem : $\int_a^b (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

BASIC EQUATIONS OF ELECTRODYNAMICS

Maxwell's Equations

In general :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

In matter :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Auxiliary Fields

Definitions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{array} \right.$$

Linear media :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \end{array} \right.$$

Potentials

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Lorentz force law

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Energy, Momentum, and Power

$$\text{Energy :} \quad U = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau$$

$$\text{Momentum :} \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d\tau$$

$$\text{Poynting vector :} \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$$\text{Larmor formula :} \quad P = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 a^2$$

FUNDAMENTAL CONSTANTS

ϵ_0	$= 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$	(permittivity of free space)
μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$	(permeability of free space)
c	$= 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$	(speed of light)
e	$= 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$	(charge of the electron)
m	$= 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$	(mass of the electron)

SPHERICAL AND CYLINDRICAL COORDINATES

Spherical

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{x} = \sin \theta \cos \phi \hat{r} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi} \\ \hat{y} = \sin \theta \sin \phi \hat{r} + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi} \\ \hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\sqrt{x^2 + y^2}/z) \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \end{cases}$$

Cylindrical

$$\begin{cases} x = s \cos \phi \\ y = s \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{x} = \cos \phi \hat{s} - \sin \phi \hat{\phi} \\ \hat{y} = \sin \phi \hat{s} + \cos \phi \hat{\phi} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{s} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \\ \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases}$$