

Oppgave 1

a)
$$\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2\underline{r}\cdot\underline{r}')^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r^2} + \dots \right)$$

Monopolbidrag p.g.a. nettoledning Q :

$$Q/(4\pi\epsilon_0 r) = \int d\underline{r}' \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{r} \rho(\underline{r}') d\underline{r}'$$

Dipolbidrag

$$\int \frac{1}{r^3} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \rho(\underline{r}') (\underline{r}\cdot\underline{r}') d\underline{r}' = \frac{\underline{r}\cdot\underline{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Dipolmomentet er lik

$$\underline{P} = \int \rho(\underline{r}) \underline{r} d\underline{r}$$

b) Innføres fordeling av dipoltetthet $\underline{P}(\underline{r})$:

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int \rho(\underline{r}') \frac{d\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \int \frac{\underline{P}(\underline{r}')(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} d\underline{r}' \right)$$

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int \frac{\underline{P}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d\underline{r}' + \int \underline{P}(\underline{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) d\underline{r}' \right) \quad (1)$$

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\int \frac{\underline{P}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d\underline{r}' + \left[\int_{-\infty}^{+\infty} - \int_{+\infty}^{-\infty} \right] d\underline{r}' \cdot \frac{\nabla' \underline{P}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right)$$

Definerer

$$\underline{P}' = \underline{P} - \nabla \underline{P}$$

↑
"fri"
ladnings
tetthet

↑
"fri"
dipol
tetthet

∴

$$\nabla \underline{E} = (\underline{P} - \nabla \underline{P}) / \epsilon_0$$

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

$$\nabla \underline{D} = \underline{P}$$

c) Grensekondisjoner for potensialet innenfor (<) og utenfor (>) $r = R$:

$$\varphi_<(R) = \varphi_>(R) \quad (2)$$

$$\epsilon \frac{\partial \varphi_<(R)}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_>}{\partial r} \quad (3)$$

(2)

d) Siden φ_r og φ_s er endelig, og siden $\cos\theta = P_1$, vil

$$\varphi_s = \sum_{n,m} a_{nm} r^n P_n(\cos\theta) e^{\pm im\varphi}$$

$$\varphi_r = \sum_{n,m} b_{nm} r^{-1-n} P_n(\cos\theta) e^{\pm im\varphi} - E_0 r P_1(\cos\theta)$$

På grunn av aksymmetri vil $m=0$. Siden det induserte feltet umulig kan variere hurtigere som funksjon av θ enn det ytre feltet faller høyere harmoniske $n > 1$ bort.

$$\varphi_s = a_0 + r P_1(\cos\theta) a_1$$

$$\varphi_r = b_0/r + (b_1/r^2) P_1(\cos\theta) - E_0 r P_1(\cos\theta)$$

Av (2) og (3) følger det at

$$a_0 + R P_1(\cos\theta) a_1 = b_0/R + (b_1/R^2) P_1(\cos\theta) - E_0 R P_1(\cos\theta)$$

$$\Leftrightarrow a_1 P_1(\cos\theta) = -b_0/R^2 - 2(b_1/R^3) P_1(\cos\theta) - E_0 P_1(\cos\theta)$$

Dette krever $b_0 = 0$, $a_0 = 0$ og

$$\varphi_s = -\frac{3}{4+2} E_0 r \cos\theta$$

$$\varphi_r = E_0 \frac{E-1}{E+2} R^3 \frac{1}{r^2} \cos\theta - E_0 r \cos\theta$$

Interne i kula er det induert et uniformt motfelt.

Langt utenfor kula er feltet lik E_0 . For $r > R$

er feltet en superposisjon av det faste ytre feltet og et induert dipolfelt.

e) Av (1) følger det at

$$\varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \underline{P} \cdot \underline{\nabla}' \left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \left(\underline{\nabla}' \cdot \left(\frac{\underline{P}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \left(\frac{\underline{\nabla}' \cdot \underline{P}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right)$$

f) Feltene vil bli like når magnetisering er lik i de to materialene. Dette kommer av at vi ikke har fri strømmer; problemet blir ekvivalent med situasjonen skissert i e) hvor potensialer skalant. (Maxwells ligninger blir symmetriske for elektr. og magn. felt.)

Oppgave 2

a)

$$\nabla \cdot \underline{E} = \rho$$

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \underline{\dot{D}}$$

>

$$\nabla \cdot \underline{\dot{D}} = \dot{\rho}$$

Deruten gjelder

$$\nabla \cdot \underline{J} + \nabla \cdot \underline{\dot{D}} = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{H})$$

>

$$\nabla \cdot \underline{J} + \dot{\rho} = 0 \quad (1)$$

fordi divergensen til et curl-felt er lik null.

b)

Skriver (1) som

$$\underline{\dot{c}}' \cdot \nabla \cdot \underline{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho) = 0$$

som er en kovariant form. Får 4-strepen

$$J^\alpha = (\underline{J} \cdot \underline{\dot{c}}', \rho) \quad (2)$$

Denne transformerer som

$$J'^\alpha = Q^\alpha_\beta J^\beta$$

når vi går fra hvileannen til observatørens referansesystem. Hvis lederen ligger langs x-aksen og $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ blir Lorentz-transformasjonen

$$Q = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

I (2) har vi

$$|\underline{\dot{c}}'| = c, \underline{\dot{c}}' = \underline{J}_x$$

$$\rho = e(n_+ - n_-) \quad (3)$$

Dette gir

$$J'_x = \gamma (J_x - \beta c \rho) \quad \rho' = \gamma (\rho - \beta \underline{\dot{c}}'_x J_x) \quad (4)$$

(4)

Observatøren observerer ledningsstrømmen $J'_x A$.

c) Det følger at $n_+ = n_-$ og $\underline{u} = \underline{0}$.

d) En kontravariant indeks sættes lik en kovariant indeks med efterfølgende summering fra 1 til 4. Rangen til vedkommende tensor reduceres derved med verdien 2.

Anvender vi dette på J'^α og $J'_\alpha = g_{\alpha\beta} J'^\beta$ får vi

$$J'_\alpha J'^\alpha = Q_\alpha^\beta J_\beta Q_\gamma^\alpha J^\gamma = \delta_\gamma^\beta J_\beta J^\gamma = J_\beta J^\beta$$

e) Normen er invariant. Vi kan derfor slutte at hvis strøm og nettoladning er lik null i et hvilhet som helst inertialsystem vil ingen krefter påvirke partikkelbevegelsen (Universell observatørhastighet.)