

22. mai 1990

①

Oppgave 1

a) Dielektrisk medium med konduktivitet null.

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \underline{\dot{D}} = \underline{\dot{D}} \quad (1)$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\underline{\dot{B}} \quad (2)$$

Iflg. Rottmann gjelder

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{E}) - \nabla^2 \underline{E} = -\nabla \times \mu \underline{\dot{H}} = -\mu \epsilon \underline{\ddot{E}}$$

Ingen aktive kilder gir

$$\nabla^2 \underline{E} - \mu \epsilon \underline{\ddot{E}} = 0$$

b) Iflg. Rottmann gjelder

$$\nabla \cdot (\varphi(\underline{r}) \underline{a}) = \underline{a} \cdot \nabla \varphi(\underline{r}) \quad (3)$$

$$\nabla \times (\varphi(\underline{r}) \underline{a}) = \nabla \varphi(\underline{r}) \times \underline{a} \quad (4)$$

Uthviset for en plan bølge involverer en vektor (feltamplitude) og en skalar funksjon (faseledd):

$$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_0 \exp(i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)) \quad (5)$$

Lin. (3.4.5) innsett i (2) gir

$$i \underline{k} \times \underline{E} = i \mu \omega \underline{H}$$

fordi også

$$\underline{H}(\underline{r}) = \underline{H}_0 \exp(i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t))$$

Siden $\nabla \cdot \underline{E} = 0$ vil $\underline{k} \cdot \underline{E} = 0$ og vi får

$$|\underline{E}| = \frac{\mu \omega}{k} |\underline{H}|$$

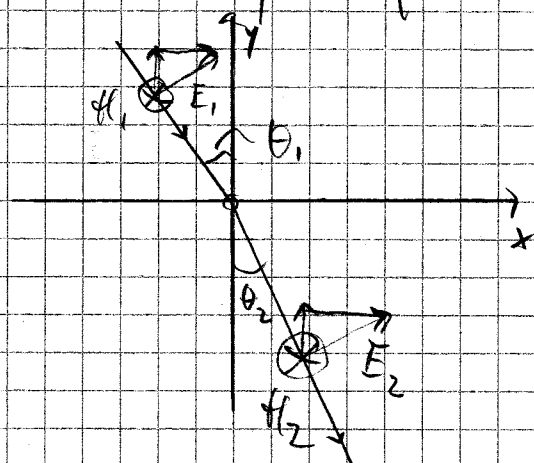
Bølgeimpedansen er følgelig gitt ved

$$Z = \frac{\mu \omega}{k} = \mu v = \mu \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{n} = Z_0 / n$$

hvor $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ er bølgeimpedansen i vakuum mens n er brytningsindeksen.

(2)

- c) Tangentialkomponentene til $\underline{E}$ og $\underline{H}$ er bevart på grenseflaten. Det gir



$$H_1 = H_2$$

$$E_1 \cos \theta_1 = E_2 \cos \theta_2$$

Ved hjelp av bølgeimpedansen får vi

$$\frac{E_1}{Z_1} = \frac{E_2}{Z_2}$$

Dvs. at

$$E_1 \sqrt{\epsilon_1} = E_2 \sqrt{\epsilon_2}$$

$$\text{og } \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2}} = \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2}$$

På grunn av Snells lov gjelder også at

$$\sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_1 = \sqrt{\epsilon_2} \sin \theta_2 = \sqrt{\epsilon_2} (1 - \cos^2 \theta_2)$$

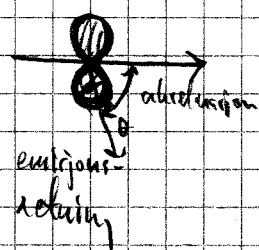
dvs.:

$$\sqrt{\epsilon_1} (1 - \cos^2 \theta_1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\epsilon_2} (1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos^2 \theta_1)$$

Løst m.h.p. θ_1 finner vi

$$\theta_B \equiv \theta_1 = \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \right)$$

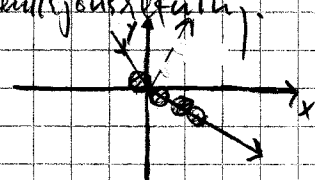
- d) Strålingsimpedansen går som $\sin^2 \theta$ der θ er vinkelen mellom akselerasjon/retardasjon og emisjonsretning.



Ved totalrefleksjon har vi

90° mellom medium 2's punkt-

dipolen og "reflektert" stråle; fullstendig null refleksjon.



(3)

Oppgave 2

a) Vi har

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\underline{v}' \frac{\underline{J}(\underline{r}') \times (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int d\underline{v}' \frac{\underline{J}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

fordi

$$\nabla \times (\underline{a} \varphi) = \varphi \nabla \times \underline{a} - \underline{a} \times \nabla \varphi = -\underline{a} \times \nabla \varphi$$

når $\underline{a}$ er en konstant vektor. Derfor gjelder

$$\underline{B}(\underline{r}) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r})$$

og

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{J}(\underline{r}') d\underline{v}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

Siden $\nabla \cdot \underline{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) \equiv 0$ impliserer dette at magnetiske kilder (sluk) ikke finnes.

b)

Her vil $\int d\underline{v}' \rightarrow \int dl'$ fordi

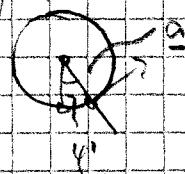
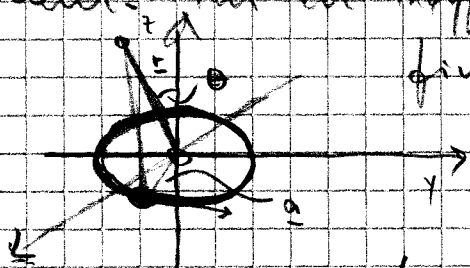
$$\int d\underline{v}' = (I / (dx'dz')) dx' dy' dz' \hat{e}_x = I dy'$$

for strøm i x -retning, f.eks.

Derfor er

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{dl' I}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \underline{A}_r + \underline{A}_z + \underline{A}_\varphi$$

Av symmetri grunner ønsker bare azimuthal komponent. Tar en slappe i gangen. Trenger $\underline{r} \cdot \underline{r}'$, som finnes av figurene:



Dette gir: $\underline{r} \cdot \underline{r}' = r a (\cos\varphi', \sin\varphi', 0) \cdot (\sin\theta, 0, \cos\theta) = r a \sin\theta \cos\varphi'$

(4)

$$A_{-q} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int \frac{a d\varphi' \cos\varphi'}{(r^2 + a^2 - 2ar \sin\theta \cos\varphi')^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a d\varphi' \cos\varphi'}{\sqrt{a^2 + r^2} \left(1 - \frac{2ar \sin\theta \cos\varphi'}{a^2 + r^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Rektantvikling giv

$$A_{-q} \approx \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} a \cos\varphi' d\varphi' \left(\frac{r a \sin\theta \cos\varphi'}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \right)$$

$$A_{-q} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho_0 I}{4} \frac{a^2 r \sin\theta}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

Var vi med begge skæffene giv vi for totalt
vektorpotensial

$$A = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\rho_0 I r \sin\theta}{4} \left(\frac{a^2}{(a^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{r^2}{(r^2 + r^2)^{3/2}} \right)$$

c) Række

$$(1 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \dots$$

dvs.

$$\begin{aligned} \frac{1}{|r-r'|} &= \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2r \cdot r')^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r \cdot r'}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r \cdot r'}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r \cdot r'}{r^2} \right)^2 \right) \\ &\approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r \cdot r'}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{3(r \cdot r')^2 - r'^2 r^2}{r^4} + \dots \right) \end{aligned}$$

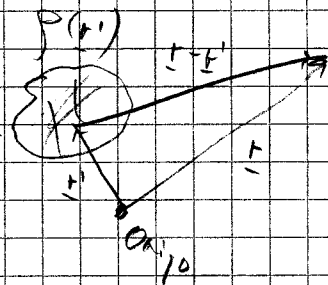
Kvadrupolbidraget til potentialet kan følgende skrives som

$$\varphi_{kv}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} \int \rho(r') (3(r \cdot r')^2 - r'^2 r^2) dv' \quad (1)$$

Dette kan skrives som

$$\varphi_{kv}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} \sum_{i,j} x_i x_j Q_{ij}$$

hvor kvadrupoltensoren er givet ved



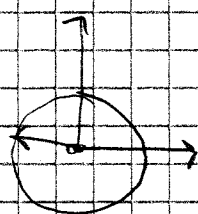
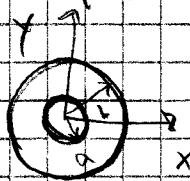
$$Q_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}') (3x_i'x_j' - \delta_{ij}r'^2) dV'$$

(5)

For å se dette må en omforme linn. (1) ved hjelp av

$$\int \rho(\mathbf{r}') (3(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^2 - (r')^2) dV' = \int \rho(\mathbf{r}') \sum_{i,j} (x_i'x_j'x_j'x_i' - x_i'x_j'\delta_{ij}r'^2) dV'$$

d) Kvadrupolmoment-tensoren har i alt 3 x 3 = 9 komponenter. For en ring i gangen får vi ikke-null bidrag for $i=j$, dvs. at



$$Q_{ii} = \int dV' (3x_i'^2 - r'^2) \rho(\mathbf{r}')$$

$$Q_{ii} = \frac{L}{2\pi a} \int_0^{2\pi} ((3\cos^2\phi)a^2 - a^2) d\phi$$

$$Q_{ii} = \frac{L}{2} a^2$$

Av symmetrigrunnen er $Q_{22} = Q_{11}$ og siden $\text{Tr } Q = 0$ er $Q_{33} = -Q_{11} - Q_{22}$. Alt dette medfører at de tre hovedverdiene for kvadrupoltensoren til de motsatt ladete ringene blir

$$Q_1 = \frac{L}{2} (a^2 - b^2)$$

$$Q_2 = \frac{L}{2} (a^2 - b^2)$$

$$Q_3 = L (b^2 - a^2)$$