Eksamen i fag 74316 Elektromagnetisk teori

22/5 - 91.

Løsningsforslag

(1)

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \vec{J}$$

Feltene i de makroskopiske likningene er middelverdien over de mikroskopiske feltene, midla over flere molekyler.

$$\vec{E}_{makro} = \langle \vec{E}_{mikro} \rangle \quad , \quad \vec{B}_{makro} = \langle \vec{B}_{mikro} \rangle$$

Makroskopisk ladningstetthet, ρ, er middelverdien av mikroskopisk ladningstetthet for <u>fri</u>e ladninger.

Makroskopisk strømtetthet, $\vec{J}$, er middelverdien av mikroskopisk strømtetthet for <u>frie</u> strømmer.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \langle \vec{E}_{mikro} \rangle + \text{ledd fra midling av ladningstetthet fra bundne ladninger.}$$

Det dominerende leddet er $\vec{P}$ (midlere dipoltetthet)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \langle E_{mikro} \rangle + \vec{P} + \text{høyere ordens ledd}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\langle \vec{B}_{mikro}\rangle + \text{ledd fra midling av strømtetthet fra bundne strømmer.}$$

Det dominerende leddet er $\vec{M}$ (midlere magnetisk moment)

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\langle \vec{B}_{mikro}\rangle - \vec{M} + \text{høyere ordens ledd.}$$

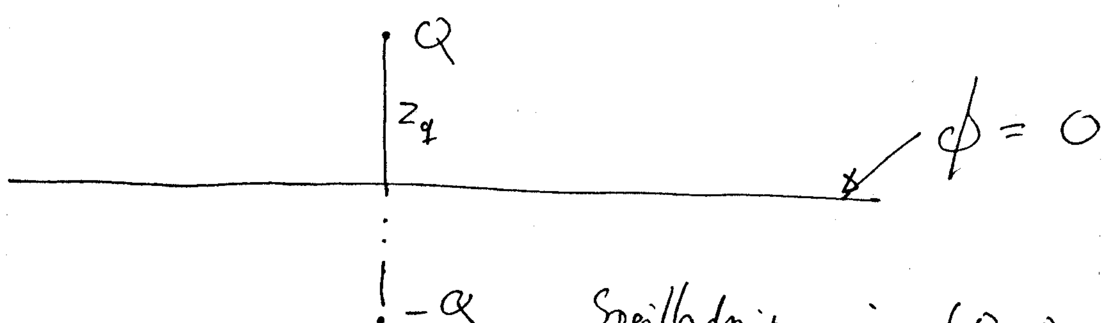
De makroskopiske likningene er gyldige for fenomener som varierer langsomt på molekylær skala. Løsningene av likningene må variere langsomt på molekylær skala, altså lange bølgelengder og lave frekvenser.

---

2) a) **Problem:** Ladningsfordeling inne i et område med potensialet (evt. potensialets deriverte) gitt på randa.

Kan erstatte betingelsene på randa med et sett av speilladninger utenfor området slik at randbetingelsene er tilfredstilt.

b)



Speilladning i $(0, 0, -z_q)$

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_q)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+z_q)^2}}\right)$$

c

Trenger Greens funksjon: Greens funksjon er potensial i (x, y, z) fra enhetsladning i (x', y', z') slik at $\phi = 0$ på randa.

Kan finne Greens funksjon vha. speilladning på tilsvarende måte som i b):

$$G_D(x,y,z,x',y',z') = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right)$$

Trenger $\nabla_{x'} G_D \cdot d\vec{S}$ på randa:

$$d\vec{S} = \cancel{0} - \hat{z}\, dx'dy'$$

$$\nabla_{x'} G_D \cdot d\vec{S} = -\left(\frac{\partial}{\partial z'} G_D\right) dx'dy'\Big|_{z'=0}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} G_D\Big|_{z'=0} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{z-z'}{(\quad)^{3/2}} + \frac{z+z'}{(\quad)^{3/2}}\right)\Big|_{z'=0}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{z}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Skal beregne

$$\phi(x,y,z) = \int_V G_D \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, d^3x' - \int_S \phi \nabla_{x'} G_D \cdot d\vec{S}$$

$$= \phi_V + \phi_S$$

$$\rho(x',y',z') = q\,\delta(x')\,\delta(y')\,\delta(z'-z_q)$$

$$\phi_V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_q)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+z_q)^2}}\right)$$

$$1'' + \phi_s = \int_0^\infty dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy'\; 2V \frac{1}{2\pi} \frac{z}{((x-x')^2+(y-y')^2+z^2)^{3/2}}$$

(substitusjon $u = y' - y$, $du = dy'$)

$$\stackrel{A}{=} \frac{zV}{\pi}\int_0^\infty dx' \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{1}{(u^2+(x-x')^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2zV}{\pi}\int_0^\infty dx' \frac{1}{(x-x')^2+z^2}$$

(substitusjon $u = x' - x$, $du = dx'$)

$$= \frac{2zV}{\pi} \int_{-x}^{\infty} \frac{du}{u^2+z^2} = \frac{2V}{\pi} \Big[\text{Arctan}\left(\frac{u}{z}\right) \Big]_{-x}^{\infty}$$

$$= 1V + \frac{2V}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{x}{z}\right)$$

Altså:

$$\phi = \phi_V + \phi_s = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_q)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+z_q)^2}} \right)$$
$$+ \frac{2V}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{z}\right)$$

3

a

Nærfelt går som $\sim \frac{1}{r^2}$ og er viktige nær kilden.

Strålingsfelt går som $\sim \frac{1}{r}$ og dominerer langt fra kilden.

b

Skriver δ-funksjonen på fourierform.

$$\delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\left(t - t' - \frac{R}{c}\right)} \, d\omega$$

Altså :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{2\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{x}',t')}{R} e^{-i\omega(t-t'-\frac{R}{c})} d\omega\, d^3x'\, dt'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{2\pi}\int \underbrace{\left(\vec{j}(x',t')e^{i\omega t'} d\omega\right)}_{\text{Integralet over } t' \text{ gir } \vec{j}(x',\omega)} \frac{1}{R} e^{-i\omega t + ikR} d^3x'\, d\omega$$

Integralet over t' gir $\vec{j}(x',\omega)$:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{2\pi}\int \vec{j}(x',\omega)\frac{1}{R} e^{ikR} d^3x'\, e^{-i\omega t} d\omega$$

For store avstander kan vi skrive $\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r}$ og $kR \approx kr - k(\hat{n}\cdot\vec{x}')$:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int \vec{j}(x',\omega)e^{-ik(\hat{n}\cdot\vec{x}')} d^3x'\, e^{-i\omega t} d\omega$$

fouriertransform $\omega \to t$

altså :

$$A(\vec{x},\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\underbrace{\int \vec{j}(x',\omega)e^{-ik(\hat{n}\cdot\vec{x}')} d^3x'}_{=\ \vec{I}(\hat{n},\omega)}$$

QED

c

Dipolapproksimasjonen er å erstatte $e^{-ik(\hat{n}\cdot\vec{x}')}$ i integranden i uttrykket for $\vec{I}(\hat{n},\omega)$ med 1.

Approksimasjonen er god når $k|\vec{x}'| \ll 1$, altså når utstrekninga av kilden er liten i forhold til bølgelengda.

c

Trenger sammenhengen mellom $\vec{A}(\vec{x},\omega)$ gitt i b) og $\vec{B}(\vec{x},\omega)$:

$$\vec{B}(\vec{x},\omega) = \nabla\times\vec{A}(\vec{x},\omega)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\left(\frac{e^{ikr}}{r}\vec{I}(\hat{n},\omega)\right)$$

$$= \frac{ik\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\left(\hat{n}\times\vec{I}(\hat{n},\omega)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Må beregne $\vec{I}(\hat{n},\omega)$:

Oppgitt koordinatsystem:

$$\hat{e}_\varphi = (-\sin\phi', \cos\phi', 0)$$

$$\hat{n} = (\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)$$

$$\vec{x}' = (\cos\phi', \sin\phi', 0)\, r_0$$

$$\vec{I} = \pi r_0 I_0 \left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right) \int_0^{2\pi} e^{-ik r_0 \sin\vartheta \cos\varphi'} (-\sin\varphi', \cos\varphi', 0)\, d\varphi'$$

Ser at

$$I_z = 0$$

$$I_x = 0$$

$$I_y = \pi r_0 I_0 \left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right) \int_0^{\infty} \cos\varphi' e^{-ik r_0 \sin\vartheta \cos\varphi'} \, d\varphi'$$

$$= -i\, 2\pi^2 r_0 I_0 \left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right) J_1(k r_0 \sin\vartheta)$$

trenger:

$$(\hat{n} \times \vec{I}) = I_y(-\cos\vartheta, 0, \sin\vartheta)$$

$$-(\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{I})) = \cancel{m}\, I_y (0, 1, 0)$$

$$B(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int B(\vec{x},\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{\mu_0 r_0 I_0}{4r}\int k\, e^{ikr - i\omega t}\left(\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right) J_1(k r_0 \sin\vartheta)$$

$$\cdot\, d\omega\; (-\cos\vartheta,\ 0,\ \sin\vartheta)$$

$$= \frac{\mu_0 r_0 \omega_0 I_0}{2rc}\cos(\omega_0 t - k_0 r)\, J_1(k_0 r_0 \sin\vartheta)\,(-\cos\vartheta,\ 0,\ \sin\vartheta)$$

$$E(\vec{x},t) = \frac{\mu_0 r_0 \omega_0 I_0}{2r}\cos(\omega_0 t - k_0 r)\, J_1(k_0 r_0 \sin\vartheta)\,(0,\ 1,\ 0)$$

$$\vec{S}(\vec{x},t) = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$= \frac{\mu_0 r_0^2 \omega_0^2 I_0^2}{4r^2c}\cos^2(\omega_0 t - k_0 r)\left[J_1(k_0 r_0 \sin\vartheta)\right]^2 \underbrace{(\sin\vartheta,\ 0,\ \cos\vartheta)}_{=\hat{n}}$$

$$\cancel{u(\vec{x},t) = \langle r^2 |\vec{S}(\vec{x},t)|\rangle_t} \quad \mathcal{U}(\hat{n}) = \langle r^2 |\vec{S}|\rangle_t \rangle$$

$$= \frac{\mu_0 r_0^2 \omega_0^2 I_0^2}{8c}\left[J_1(k_0 r_0 \sin\vartheta)\right]^2$$

(4)

(a) Likninga uttrykker ladningsbevarelse. (Kontinuitetslikning for ladning og strøm).

$$\partial_\alpha J^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^0} J^0 + \frac{\partial}{\partial x^k} J^k$$
$$= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$x^0 = ct \quad , \quad J^0 = c\rho \quad , \quad J^k = j^k$$

Likninga er invariant (har samme form i alle koordinatsystemer)

(b)

Finner strømtettheta og transformerer denne:

$$\rho = (n_+ - n_-) e$$
$$\vec{j} = -n_- \vec{u} e$$

i-aksen langs lederen:

$$J = (ce(n_+ - n_-), -uen_-, 0, 0)$$

transformeren:

$$J^{1'} = -\gamma\beta J^0 + \gamma J^1 = -\gamma\beta ce(n_+ - n_-) - \gamma uen_-$$
$$= -\gamma e(vn_+ + (u-v)n_-)$$

A · transformerer som $dy\,dz = dy'\,dz' \Rightarrow A' = A$

Strøm i lederen: $I = A J^1$

$$I' = A' J^{1'} = -\frac{Ae}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} (v n_+ + (u-v) n_-)$$

c)

Vi har oppgitt den kontravariante felttensoren $F^{\alpha\beta}$ For å regne ut kontraksjonen trenger vi den kovariante tensoren $F_{\alpha\beta}$. Vi finner den kovariante fra den kontravariante ved å anvende den metriske tensoren $g_{\alpha\beta}$:

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} F^{\gamma\delta}$$

Siden g er diagonal med kompomnentene $g_{00} = 1$ og $g_{kk} = -1$, kan dette skrives som

$$F_{\alpha\beta} = K(\alpha,\beta) F^{\alpha\beta}$$

med

$$\begin{aligned} K(0,0) &= 1 \cdot 1 = 1 \\ K(k,l) &= (-1)\cdot(-1) = 1 \\ K(0,k) = K(k,0) &= (-1)\cdot 1 = -1 \end{aligned}$$

altså

$$F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Bruker vi dette finner vi

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 2(|\vec{B}|^2 - \frac{1}{c^2}|\vec{E}|^2)$$