FAG 74316 ELEKTRISITET OG MAGNETISME 2

Løsningsforslag eksamen 13. jan 1992

Oppgave 1:

a) Av symmetrigrunner kan $\vec{E}$-feltet bare peke langs z-aksen, som er den eneste utvalgte retning i problemet. Gauss lov blir da

$$\frac{d}{dz} E_z(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon}\left[\delta(z+\tfrac{1}{2}d) - \delta(z-\tfrac{1}{2}d)\right]$$

Integrert, med grensebetingelsen $E_z = 0$ for $z = -\infty$:

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{z} dz'\left[\delta(z'+\tfrac{1}{2}d) - \delta(z'-\tfrac{1}{2}d)\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{for} \quad z < -\frac{1}{2}d \\ \frac{\sigma}{\varepsilon} & \text{for} \quad -\frac{1}{2}d < z < \frac{1}{2}d \\ 0 & \text{for} \quad z > \frac{1}{2}d. \end{cases}$$

b)

Potensialforskjellen $\quad U = \int_{-d/2}^{d/2} dz\, E_z(z) = \frac{\sigma d}{\varepsilon}$.

c)

$$U = E_z d \Rightarrow \underline{E_z = \frac{U}{d}}$$

$$E_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \underline{\sigma} = \varepsilon_0 E_z = \underline{\frac{\varepsilon_0}{d} U}$$

d)

$$\underline{Q} = \sigma A = \underline{\frac{\varepsilon_0 A}{d} U}$$

$$Q = CU \Rightarrow \underline{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

e) Elektrostatisk energitetthet: $w_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 \Rightarrow$

Feltenergi $\quad \underline{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_z^2 A d = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}U^2 = \underline{\frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2C}Q^2}$

f) Med U konstant varierer $\mathcal{E}$ med ε som

$$\mathcal{E} \sim \varepsilon$$

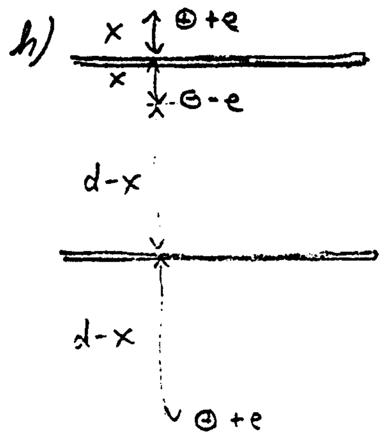
Dvs. at energien som er lagret i kondensatoren øker dersom ε øker. Energidifferansen må komme fra det arbeidet vi utfører ved å skyve den dielektriske skiven inn mellom platene. Kraften på skiven forsøker derfor <u>å skyve skiven ut</u>.

g) Med Q konstant varierer $\mathcal{E}$ med ε som

$$\mathcal{E} \sim \varepsilon^{-1}$$

Kraften på skiven forsøker derfor <u>å trekke skiven inn</u>.

h)



Når elektronet er i avstand x fra den metalliske kondensatorplaten vil det (effektivt sett) være indusert en positiv speilladning i avstand x bak denne. Når x blir liten nok blir den tiltrekkende kraften mellom elektronet og speilladningen større enn den frastøtende kraften fra kondensatorplaten.

[Kommentarer: i) Det som egentlig skjer er en omfordeling av ladningstettheten på overflaten av kondensatorplaten. ii) Det vil også induseres en positiv speilladning i avstand $d-x$ bak den andre kondensatorplaten, og et uendelig antall iterente speilladninger, men når $x \ll d$ kan disse neglisjeres.]

i) Elektronet er i et potensial

$$V(x) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 2x} - \frac{|e|U}{d}x + \text{konst}.$$

slik at kraften på det blir

$$\vec{F} = \hat{e}_z\left[\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2x^2} - \frac{|e|U}{d}\right]$$

som forsvinner når

$$\underline{x} = \sqrt{\frac{|e|d}{8\pi\varepsilon_0 U}} = \sqrt{\frac{1.60\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-3}}{8\pi\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{2}}}\ \text{m} \simeq 0.85\cdot 10^{-7}\,\text{m} = \underline{850\,\text{Å}}$$

Vi har $x \ll d$, så det er konsistent å neglisjere de andre speilladningene.

Subtilt punkt: Speilladningsmetoden kan brukes til å finne potensialet, ikke kreftene direkte. Kraften fra speilladningen er derfor $e^2/(4\pi\varepsilon_0 2x^2)$ og ikke $e^2/4\pi\varepsilon_0(2x)^2$.

Oppgave 2:

a)
$$\vec{J}(\vec{k}) = \int d^3x\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, I_0\hat{e}_z \sin[k_0(\tfrac{1}{2}d-|z|)]\,\Theta(\tfrac{1}{2}d-|z|) * \delta(y) * [\delta(x-\tfrac{1}{2}x_0)e^{-i\psi} + \delta(x+\tfrac{1}{2}x_0)e^{i\psi}]$$

$\left(\begin{array}{l} k_x = \sin\vartheta\cos\varphi\, k \\ k_z = \cos\vartheta\, k \end{array}\right.$

$$= I_0\hat{e}_z[e^{-\frac{i}{2}k_x x_0 - i\psi} + e^{\frac{i}{2}k_x x_0 + i\psi}] * \int_{-d/2}^{d/2} dz\, \sin[k_0(\tfrac{1}{2}d-|z|)]\, e^{-ik_0 z\cos\vartheta}$$

$$= \underline{2I_0\hat{e}_z \cos[\tfrac{1}{2}\sin\vartheta\cos\varphi\, k_0 x_0 + \psi] * \frac{2}{k_0\sin^2\vartheta}[\cos(\tfrac{1}{2}k_0 d\cos\vartheta) - \cos(\tfrac{1}{2}k_0 d)]}$$

b) Vi har

$$\underline{U(\hat{n}) \propto |\vec{J}_\perp(\vec{k})|^2} = \sin^2\vartheta\, |\vec{J}(k)|^2 \propto \underline{|\vec{J}(k)|^2}$$

c) $\vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\vartheta = 0, \ \sin\vartheta = 1.$

d-avhengigheten til utstrålt effekt ligger i faktoren

$$\left[\cos(\tfrac{1}{2}k_0 d\cos\vartheta) - \cos(\tfrac{1}{2}k_0 d)\right]^2 \underset{\vartheta=\pi/2}{=} \left[1-\cos(\tfrac{1}{2}k_0 d)\right]^2$$

som blir størst når $\cos(\frac{1}{2}k_0 d) = -1$, dvs

$$\tfrac{1}{2}k_0 d = (2n+1)\pi = \pi, 3\pi, \ldots$$

eller

$$\underline{d = \frac{(4n+2)\pi}{k_0} = \frac{2\pi}{k_0}, \frac{6\pi}{k_0}, \ldots}$$

d) φ-avhengigheten til utstrålt effekt ligger i faktoren

$$\left[\cos(\tfrac{1}{2}\sin\vartheta\cos\varphi\, k_0 x_0 + \psi)\right]^2 \underset{\vartheta/\pi/2}{=} \left[\cos(\tfrac{1}{2}\cos\varphi\, k_0 x_0 + \psi)\right]^2$$

For maksimal utstråling i $\hat{e}_x$-retningen ($\cos\varphi = 1$) må vi ha

$$\cos(\tfrac{1}{2}k_0 x_0 + \psi) = \pm 1, \quad \text{ɔ:} \quad \tfrac{1}{2}k_0 x_0 + \psi = n\pi = 0, \pi, 2\pi, \ldots$$

For minimal utstråling i $\hat{e}_y$-retningen ($\cos\varphi = 0$) må vi ha

$$\cos\psi = 0, \quad \text{ɔ:} \quad \underline{\psi = (m+\tfrac{1}{2})\pi = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots}$$

Dette betyr at vi må ha

$$\tfrac{1}{2}k_0 x_0 = (n-m-\tfrac{1}{2})\pi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$$

$$\underline{\underline{x_0 = \frac{(2\ell+1)\pi}{k_0} = \frac{\pi}{k_0}, \frac{3\pi}{k_0}, \ldots}}$$

e) For maksimal utstråling i $\hat{e}_y$-retningen må vi ha $\cos\psi = \pm 1$, ɔ:

$$\underline{\psi = m\pi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots}$$

For minimal utstråling i $\hat{e}_x$-retningen må ha $\cos(\frac{1}{2}k_0 x_0 + m\pi) =$ dvs.

$$\tfrac{1}{2}k_0 x_0 = (\ell + \tfrac{1}{2})\pi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$$

$$\underline{x_0 = \frac{(2\ell+1)\pi}{k_0} = \frac{\pi}{k_0}, \frac{3\pi}{k_0}, \ldots}$$

(Retningsavhengigheten kan endres elektronisk ved å justere faseforholdet ψ elektronisk).

Oppgave 3:

a) De elektromagnetiske feltene $\vec{E}$ og $\vec{B}$ kan uttrykkes ved potensialene Φ og $\vec{A}$:

$$\vec{E} = -(\nabla\Phi + \dot{\vec{A}}), \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Disse uttrykkene er invariante under justértransformasjoner:

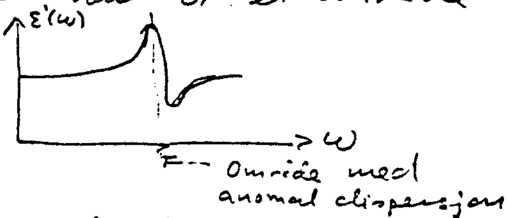
$$\Phi \to \Phi' = \Phi - \dot{\Lambda}, \quad \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda$$

b) Ved Brewsters vinkel er det ingen refleksjon av parallell-polarisert*) lys. *) Dvs. når $\vec{E}$ står normalt på reflekterende flate.

c) Kramers-Kronig relasjonene uttrykker (på integralform) en sammenheng mellom (de frekvensavhengige) real- og imaginærdelene til (f.eks.) permittiviten

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\,\varepsilon''(\omega)$$

d) Normalt er $\frac{d\varepsilon'}{d\omega} > 0$. Nær resonanser har vi et område med anomal dispersjon, $\frac{d\varepsilon'}{d\omega} < 0$.



e) Abraham-Lorentz' ligning er en bevegelsesligning for punktpartikler som tar hensyn til strålingsreaksjonen