

(1)

FAG 74316 Elektrisitet og magnetisme 2 Løsningsforslag, eksamen 12. januar 1993

Oppgave 1

a) Maxwell-ligningen

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

kan tolkes som en modifikasjon av Ampères lov

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_M)$$

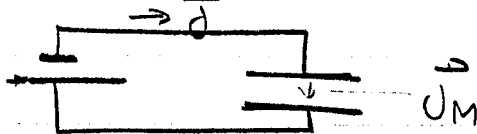
der

$$\vec{J}_M \equiv \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

kalles for Maxwell's forskyvningsstrøm (tetthet).

[Kommentarer:

- i) Dette tilleggsgleddet er nødvendig når $\nabla \cdot \vec{J} \neq 0$.
- ii) Når en kondensator lades opp vil det gå en regulerende strøm i tilførselsledningene, og en forskyvningsstrøm mellom kondensatorplatene,



- iii) Det er ingen ekte strøm i den forstand at den er assosiert med noen ladningstransport.
- iv) Dette leddet gjør propagering av elektromagnetiske bølger mulig]

b) De elektromagnetiske feltene kan uttrykkes ved potensialer

$$\vec{E} = -(\nabla \Phi + \dot{\vec{A}}), \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Feltene er invariante under gauge transformasjoner av potensialene

$$\Phi \rightarrow \Phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} - \nabla \Lambda$$

der Λ er en vilkårlig deriverbar funksjon av tid og rom, Dette kalles gaugeinvarians,

(2)

generell

- c) En ladningsfordeling $\rho(\vec{x})$ kan karakteriseres på en systematisk måte ved sine (elektriske) multipolmomenter

$$Q = \int d^3x \rho(\vec{x}) \quad (\text{monopolmoment})$$

$$\vec{P} = \int d^3x \vec{x} \rho(\vec{x}) \quad (\text{dipolmoment})$$

$$Q_{ij} = \int d^3x (3x_i x_j - x^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{x}) \quad \text{kvadrupolmoment}$$

- d) Konform avbildning er (blant annet) en metode til å løse 2-dimensjonale potensialproblemer. Metoden er basert på at real- og imaginærdelen til en analytisk funksjon tilfredsstiller Laplace's ligning. Et (vanskelig) potensialproblem med en komplisert rand kan ved en passende konform avbildning transformeres til et ekvivalent problem med enklere rand.

- e) Se på en plan harmonisk lysbølge som brytes og reflekteres ved en plan grenseflate. Innfallende, reflektert og transmittert lysstråle vil ligge i et plan – innfallsplanet.
- Normalpolarisert lys vil si at $\vec{E}$ -vektoren i lysfeltet svinger normalt på innfallsplanet (dvs. parallelt med grenseflaten).
 - Parallelpolarisert lys vil si at $\vec{E}$ -vektoren i lysfeltet svinger parallelt med innfallsplanet.

f) Stokes parametrene er fire reelle parametre som karakteriserer polarisasjonstilstanden til en (ikke nødvendigvis monokromatisk) lysbølge.

g) Oscillatorstyrkene f_i er størrelsen som brukes til å parametrisere de dynamiske egenskapene til et atom eller molekyl i vekselvirkning med elektromagnetiske felter. I en enkel klassisk modell er f_i antallet elektroner i molekylet som er harmoniske bundet med karakteristiske frekvens ω_i og demping γ_i . Kvantemekanisk trenger ikke f_i å være heltallig, men summenegelen $\sum f_i = Z \equiv \# \text{ elektroner i molekylet}$ skal holde.

h) Maxwell's spenningskansen uttrykker impulsstrømteitheten i det elektromagnetiske felt, slik at $-T^{ij}$ er strømteitheten av "j-inputs" i retning i.

$$T^{ij} = D^i E^j + B^i H^j - \delta^{ij} U_{EM}$$

$$\text{der } U_{EM} = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}).$$

Den elektromagnetiske kraften på et legeme V (med rand ∂V) er gitt, som

$$\vec{F}^i = \int_{\partial V} d\sigma^j T^{ij}$$

På differensiell form

$$\frac{\partial g^i_{EM}}{\partial t} + f^i = \partial_i T^{ij}$$

(4)

i) Pga strålingsreaksjonen vil en ladning som slippes løs i et harmonisk potensial undergå demping. Den vil derfor ikke stråle på en skarp frekvenslinje ω_0 , men over et frekvensspekter rundt ω_0 . Halvverdbredden av dette spekteret kalles for naturlig linjebredde.

j) Rayleighspredning er spredning av lys på atomer og molekyler. Ved lave frekvenser har spredningstverrsnittet opptørsele

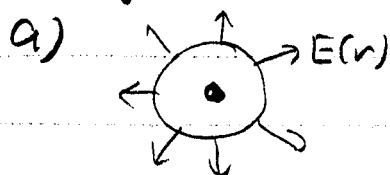
$$\sigma \sim \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

Dette er f.eks. årsaken til at himmelen er blå og solnedgangen rød.

k) Synkrotronstråling er stråling fra relativistiske ladete partikler. Opprinnelig fra sirkulær bevegelse i en synkrotron, men i dediserte fasiliteter (som Grenoble) fra mer kompliserte bevegelsesmønstre (forårsaket av f.eks. "wigglers" magneter).

(5)

Oppgave 2



Gauss' lov på integral form:

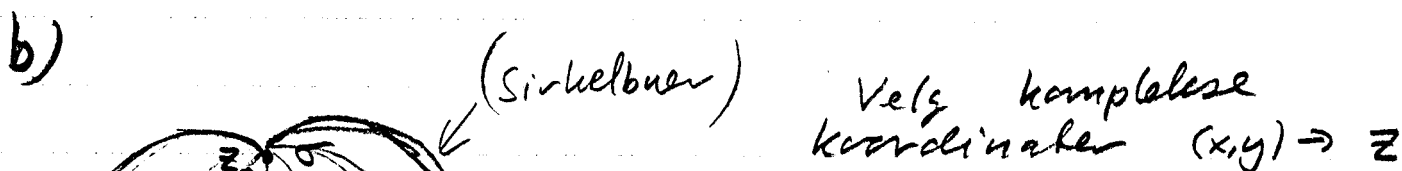
$$2\pi r L E(r) = \frac{\sigma L}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{for } r > r_0 = 25 \mu\text{m})$$

$$= 0 \quad (\text{for } r < r_0)$$

$$\Phi(r) = \Phi(r_0) - \int_{r_0}^r dr' E(r')$$

$$= -\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln(r/r_0) + \Phi(r_0)$$



$$\Phi(z) = \frac{-\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right|$$

$$\bar{z}_0 = -\sigma$$

$$z_0 = (0, +y_0)$$

$$\bar{z}_0 = (0, -y_0)$$

$$y_0 = 1 \text{ cm}$$

[Kommentar: Man kan vise at ekvipotensialflaten blir sirkler (og feltlinjene følger sirkelbuer),

c) $r_0 = |z - z_0| \ll |z - \bar{z}_0| \Rightarrow$

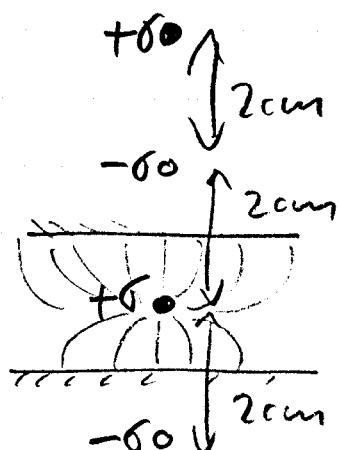
$$\Phi \sim \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{2y_0}\right)$$

$$r_0 = 25 \mu\text{m}, \quad 2y_0 = 2 \text{ cm}, \quad \Phi = 4000 \text{ V} \Rightarrow$$

$$\sigma = -\frac{2\pi\epsilon_0 \Phi}{\ln(r_0/2y_0)} = \frac{2\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^3}{\ln\left(\frac{2000}{2.5}\right)} = 3.33 \cdot 10^{-8}$$

(6)

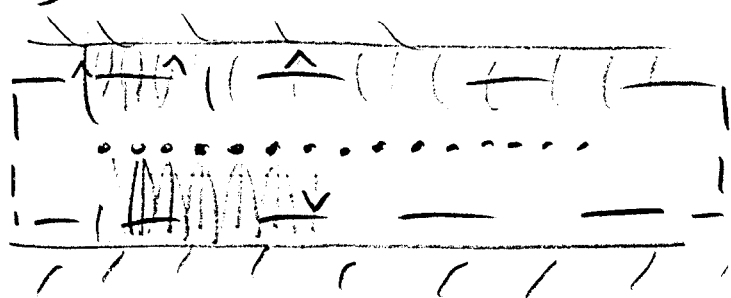
d)



En linje med
Uendelig antall speil ladninger
av alternerende fortegn, Avstand
2 cm

+σ₀

e)



Feltet vil være
tilnærmet konstant
av styrke

$$E \approx \frac{4000 \text{ V}}{1 \text{ cm}} = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

i $\pm y$ -retningen,

Vi legger en eske av ^(sterk) bredde B og ^(sterk) lengde L
rundt linjeladningene. Gauss lov gir
da

$$2 E \cdot L \cdot B \approx \frac{\sigma \cdot N(B) L}{\epsilon_0}$$

der $N(B) = \frac{B}{2 \text{ mm}}$ er antallet linjer innenfor
esken.

Da

$$\sigma = \frac{2 \epsilon_0 E \cdot 2 \text{ mm}}{1} = 2.885 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 1.417 \cdot 10^{-6}$$

(7)

Oppgave 3

$$a) \quad \rho(\vec{x}, t) = -e \delta(\vec{x} - \vec{r}_e(t))$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = -e \vec{v}_e(t) \delta(\vec{x} - \vec{r}_e(t))$$

der

$$\vec{r}_e(t) = R \left[\cos\left(\frac{vt}{R}\right) \hat{e}_x + \sin\left(\frac{vt}{R}\right) \hat{e}_y \right]$$

$$\vec{v}_e(t) = v \left[-\sin\left(\frac{vt}{R}\right) \hat{e}_x + \cos\left(\frac{vt}{R}\right) \hat{e}_y \right]$$

og $e \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ er positivt lading
ved kjerneregelen:

$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = -e \frac{d\vec{r}_e}{dt} \cdot \nabla_x \delta(\vec{x} - \vec{r}_e(t)) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t)$$

$$b) \quad \rho(\vec{k}, t) = -e \int d^3x \rho(\vec{x}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} = -e e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_e(t)}$$

$$\vec{j}(\vec{k}, t) = -\vec{v}_e(t) \int d^3x \rho(\vec{x}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} = -e \vec{v}_e(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_e(t)}$$

c) $\vec{r}_e(t), \vec{v}_e(t)$ er periodiske med frekvens

$$\omega = \omega_1 = \frac{v}{R}$$

Vi vil få stråling på denne frekvensen, og dens overharmoniske

$$\omega_n = n\omega_1$$

Dipolapprosimasjonen er generelt god når kildens utstrekning (her R) er mye mindre enn strålingens bølgelengde (her $\frac{c}{\omega_n} = \frac{cR}{nv}$).
Altså bør vi ha

$$\frac{nv}{c} \ll 1 \quad \text{spesielt} \quad \frac{v}{c} \ll 1$$

(Når $v/c \ll 1$ vil også stråling på høyere harmoniske bli undertrykt)

8

$$d) \vec{j}(\vec{k}, \omega) \equiv \int dt e^{i\omega t} \vec{j}(\vec{k}, t)$$

$$\approx -e \int dt e^{i\omega t} \vec{v}_e(t)$$

Vi innfører kompleks representasjon for $\vec{v}_e(t)$:

$$\vec{v}_e(t) = \text{Re } e^{-i\omega_1 t} (\hat{e}_y - i\hat{e}_x)$$

og finne (i kompleks rep.)

$$\vec{j}(\vec{k}, \omega) = \underbrace{-ev (\hat{e}_y - i\hat{e}_x)}_{\equiv \vec{j}(\vec{k})} 2\pi \delta(\omega - \omega_1)$$

$$\underline{j^i_l} = (\delta^{il} - n^i n^l) j^l$$

$$= -ev [(\delta^{i2} - n^i n^2) - i(\delta^{i1} - n^i n^1)] 2\pi \delta(\omega - \omega_1)$$

[Eventuelt i reell representasjon:

$$\vec{j}(\vec{k}, \omega) = -\pi ev [(\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)) \hat{e}_y - i(\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1)) \hat{e}_x]$$

$$j^i_l(\vec{k}, \omega) = -\pi ev [(\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1))(\delta^{i2} - \hat{n}^i \hat{n}^2) - i(\delta(\omega - \omega_1) - \delta(\omega + \omega_1))(\delta^{i1} - \hat{n}^i \hat{n}^1)]$$

(9)

e) Enklest løsn. er å bruke formelen for utstrålt effekt fra ikke-relativistisk akselerert partikkel

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{a}^2 \quad \text{der} \quad \dot{a}^2 = \frac{v^4}{R^2},$$

Fra foregående uttrykk menges

$$|\dot{\mathbf{j}}_{\perp}|^2 = \dot{\mathbf{j}}_{\perp R}^2 + \dot{\mathbf{j}}_{\perp I}^2.$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{j}}_{\perp R}^2 &\propto \delta^{i2} \delta^{i2} - 2(\hat{n}^2)^2 + (\hat{n}^2)^2 = 1 - (\hat{n}^2)^2 \\ &= 1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{j}}_{\perp I}^2 &\propto \delta^{i1} \delta^{i1} - 2(\hat{n}^1)^2 + (\hat{n}^1)^2 = 1 - (\hat{n}^1)^2 \\ &= 1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\dot{\mathbf{j}}_{\perp}|^2 \propto 2 - \sin^2 \vartheta = 1 + \cos^2 \vartheta$$

Prefaktoren er $(ev)^2$, Derav

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega_0^2}{32\pi^2 c} (ev)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \quad \omega_0 = \frac{v}{R}$$

$$\int d\Omega (1 + \cos^2 \vartheta) = 2\pi \cdot \left(2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{16\pi}{3} \Rightarrow$$

$$P = \frac{\mu_0 e^2 v^4}{6\pi c R^2} = \frac{e^2 v^4}{6\pi\epsilon_0 c^3 R^2}$$

(10)

$$f) \text{ Utgått effekt} = \text{Friksjonstap}$$
$$P = v \overline{F_r}$$

$$\Rightarrow \underline{\overline{F_r}} = \frac{P}{v} = \underline{\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{v}{c}\right)^3}$$

rettet mot bevegelsen.