Løsningsforslag

Oppgave 1

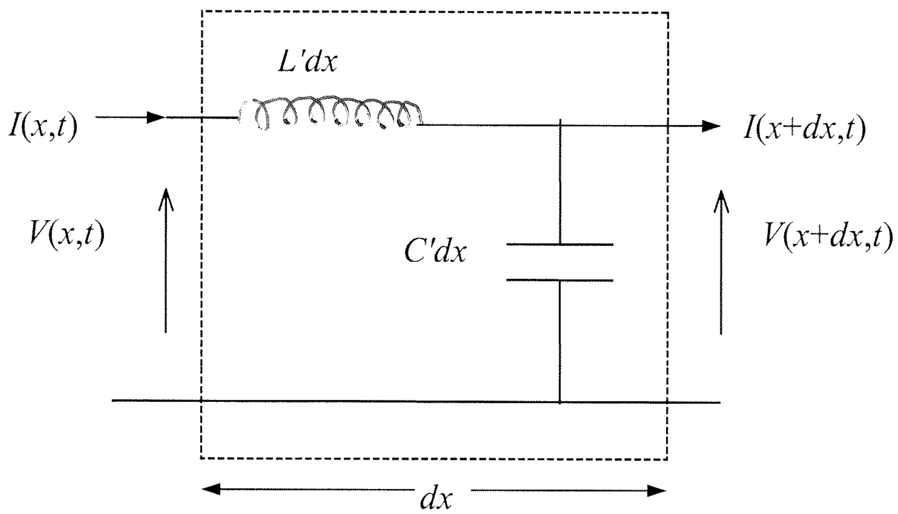
a) Av symmetrigrunner ser vi at feltet må være radielt rettet ut fra linjeladningen, og ved hjelp av Gauss' lov får vi: $\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = \varepsilon E(r) 2\pi r l = q = \lambda l$, når vi legger en sylindrisk Gauss-flate med radius r og lengde l rundt linjeladningen. Dermed fås $E(r) = -\frac{d}{dr}V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$, og direkte integrasjon gir: $V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$, hvor r_0 er en valgbar integrasjonskonstant. QED!

Ekvipotensialflatene er konsentriske sylindere. Det samme gjelder for de to lederflatene i koaksialkabelen, og pga. entydighetsteoremet får vi at potensialdifferansen mellom de to lederne er gitt ved: $\Delta V = V(r_1) - V(r_2) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.

Kapasitans pr. lengdeenhet: $C' = \frac{\lambda}{\Delta V} = 2\pi\varepsilon \Big/ \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 53.48$ pF/m

Induktans pr. lengdeenhet: $L' = \mu\varepsilon / C' = \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 41.59$ μH/m

b) Ekvivalentskjema:



Spenningsfallet gis av induktansen $L'dx$: $V(x,t) - V(x+dx,t) = -\frac{\partial V}{\partial x}dx = L'dx\frac{\partial I}{\partial t}$,

mens strømtapet gis av kapastiansen $C'dx$: $I(x,t) - I(x+dx,t) = -\frac{\partial I}{\partial x}dx = C'dx\frac{\partial V}{\partial t}$.

Dermed følger de oppgitte ligningene: $\frac{\partial V}{\partial x} + L'\frac{\partial I}{\partial t} = 0$ og $\frac{\partial I}{\partial x} + C'\frac{\partial V}{\partial t} = 0$. QED

Vi deriverer hver av ligningene en gang til mhp. x og setter inn fra den andre lign. Det gir:

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -L'\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x} = L'C'\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -C'\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} = L'C'\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$, og vi ser at V og I oppfyller

samme bølgeligning av vanlig form: $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0; \Psi = \begin{cases} V \\ I \end{cases}$. QED

Fasehastigheten er: $c = 1/\sqrt{L'C'} = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} = 2.12 \cdot 10^8$ m/s.

c) Ved innsetting ses direkte at de komplekse amplitudene oppfyller de ordinær differensialligningene:

$$\frac{dV}{dx} - i\omega L' I = 0, \ \frac{dI}{dx} - i\omega C' V = 0$$

og

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + (\omega / c)^2 \Psi = 0; \Psi = \begin{cases} V \\ I \end{cases}.$$

Bølgetall: $k = \omega / c = \omega\sqrt{L'C'} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$.

Bølgeimpedansen er definert som impedansen for en planbølge i $+x$ retning:

$V = V_0 \exp(ikx), I = I_0 \exp(ikx)$. Innsatt i de to første ligningene over fås: $kV_0 = \omega L' I_0$ og $kI_0 = \omega C' V_0$, som gir bølgeimpedansen

$$z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{\omega L'}{k} = \frac{k}{\omega C'} = \sqrt{\frac{L'}{C'}},$$

hvor det siste uttrykket følger når vi setter inn for k.

d) Refleksjonskoeffisienten ved avslutningen er $\rho = \frac{Z_{last} - z_0}{Z_{last} + z_0}$, hvor Z_{last} er mottakerens inngangsimpedans og z_0 er linjens bølgeimpedans. For å unngå at signalet reflekteres tilbake, må vi velge inngangsimpedansen $Z_{last} = z_0 = \sqrt{L'/C'} = 88.183\ \Omega$.

Vi kan neglisjere bølgeeffekter og anta at $V(x)=V(0)$ og $I(x)=I(0)$ langs hele linjen lengde l dersom $kl=\omega l/c \ll 1$, dvs. for frekvenser $\omega \ll 1/\tau$, hvor $\tau=l/c= l\sqrt{L'C'} = \sqrt{LC}$ er transittiden for en puls.

Oppgave 2

a) **E** og V oppfyller, henholdsvis, Gauss' lov (differensialform): $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$, og Poissons ligning: $\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$.

Feltet må være radielt rettet og kulesymmetrisk, dvs. $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$. Gauss lov på integralform gir

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \times \begin{cases} (r/R)^3 ; r \le R \\ 1 \quad ; r \ge R \end{cases}, \text{ dvs } E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \times \begin{cases} \dfrac{r}{R^3} ; r \le R \\ \dfrac{1}{r^2} ; r \ge R \end{cases}$$

Pga. kulesymmetrien har vi at $d\tau = 4\pi r^2 dr$ og får:

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\substack{\text{hele}\\ \text{rommet}}} E^2 d\tau = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[\int_0^R \frac{r^4 dr}{R^6} + \int_R^\infty \frac{r^2 dr}{r^4} \right] = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right] = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}.$$

b) For $r \ge R$ et feltet og potensialet det samme som for en punktladning Q, dvs.

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} ; r \ge R$$

For $r \le R$ har vi at

$$V(r) = V(0) - \int_0^r E(r')dr' = V(0) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \int_0^r r'dr' = V(0) - \frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

hvor konstanten $V(0)$ må velges slik at potensialet er kontinuerlig ved $r=R$:

$V(R) = V(0) - \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$, dvs. $V(0) = \dfrac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}$. Potensialet er derfor gitt ved

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \times \begin{cases} \left(\dfrac{3}{2R} - \dfrac{r^2}{2R^3}\right); r \le R \\ \dfrac{1}{r}; \quad r \ge R \end{cases}.$$

Ladningstettheten er konstant og lik $\rho = Q/(\frac{4}{3}\pi R^3)$ for $r \le R$, og ellers null. Innsatt i oppgitt energiformel fås

$$W_e = \frac{1}{2}\int \rho V d\tau = \frac{1}{2}\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \left(\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3}\right) 4\pi r^2 dr = \frac{3Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{10}\right] = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R},$$

Dette er nøyaktig samme svar som vi fant foran. Men denne energiformelen gjelder bare når vi velger nullpunktet for potensialet slik at $V(r) \to 0$ når $r \to \infty$.

c) Direkte innsetting gir multipolutviklingen:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{1}{r}\rho(\mathbf{r}')d\tau' = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{r^{m+1}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\mathbf{r}')(r')^m P_m(\cos\theta')d\tau' .$$

Monopol- og dipolleddene er, respektive:

$$V_{mono} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}; \; Q = \int \rho(\mathbf{r})d\tau, \text{ og } V_{dip} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int \rho(\mathbf{r}')r'\cos\theta' d\tau'.$$

Siden $r'\cos\theta' = \mathbf{r}'\cdot\hat{\mathbf{r}}$ har vi: $V_{dip}(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\int \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}' d\tau')\cdot\hat{\mathbf{r}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$, hvor

$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r})\mathbf{r} d\tau$ er dipolmomentet. QED!

c) Entydighetsteoremet ("uniqueness theorem") sier at bare én løsning tilfredsstiller Poissons ligning med gitte randverdier. Speilingsmetoden bygger på at man får de gitte randverdiene tilfredsstilt ved å innføre fiktive ladninger utenfor løsningsområdet, slik at summen av potensialene fra de virkelige og de fiktive ladningene oppfyller de gitte randbetingelsene. Innenfor løsningsområdet er dette den løsningen av Poissons ligning som tilfredsstiller randverdiene. I dette tilfelle, med en punktladning q og et uendelig, ledende plan, blir randverdiene tilfredsstilt ved at man innfører en fiktiv speilladning $-q$ i samme avstand, men på motsatt side av planet. Et ledende plan er en ekvipotensialflate, og løsningen er nå gitt ved:

$$V(x,y,z) = V_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right]; \text{ for } z \geq 0.$$

Her er V_0 potensialet til det ledende planet i $z = 0$. For $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} >> a$ og med dipolmomentet $\mathbf{p} = 2qa\,\hat{\mathbf{z}}$, kan dette skrives som $V(x,y,z) = V_0 + V_{dip}$ hvor V_{dip} er dipolpotensialet i c). Med dipolmomentet langs z aksen og kulekoordinater har vi

$V_{dip} = V_{dip}(r,\theta) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2qa\cos\theta}{r^2}$ og finner feltkomponentene ved bruk av oppgitte formeler for gradienten i kulekoordinater:

$$E_r = -\frac{\partial V_{dip}}{\partial r} = \frac{qa\cos\theta}{\pi\varepsilon_0 r^3},\quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V_{dip}}{\partial\theta} = \frac{qa\sin\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3},\ \text{og}\ E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_{dip}}{\partial\phi} = 0.$$

Oppgave 3

a) Maxwells ligninger på integralform følger fra divergens- og curl-teoremene. Vi bruker de generelle ligningene (se oppgitte formeler), de tilsvarende lign. for stoff følger på tilsvarende måte.

$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \;\Rightarrow\; \oint\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = 0$ (ingen magnetiske monopoler)

$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_0\oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = Q$ (Gauss lov; $Q = \int\rho\, d\tau$ er ladningen som omsluttes av Gaussflaten)

$\nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ (Faradays induksjonslov; $\Phi = \int\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$ er magnetisk fluks gjennom flaten som omsluttes av den lukkede integrasjonsveien)

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \dfrac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = I_{cond} + I_{displ}$ (Ampères lov; $I_{cond} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$ er ledningsstrømmen og $I_{displ} = \dfrac{d}{dt}(\varepsilon_0 \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a})$ er forskyvningsstrømmen gjennom den flaten som omsluttes av integrasjonsveien)

Tangentialkomponentene (dvs. komponentene i grenseflaten) av **E** og **H**, og normalkomponentene av **B** og **D** er kontinuerlige over en grenseflate mellom to materialer uten frie ladninger.

Fra $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ og $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$ følger at

$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$. Innsatt fra $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$ følger ladningsbevarelsen: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. QED!

b) Feltene gis ved $\mathbf{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ og $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Fra $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$ og $\nabla \times \nabla V \equiv 0$ blir følgende to av Maxwells ligninger automatisk oppfylt: $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ og

$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla V - \dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. QED!

En magnetisk dipol er en lukket strømsløyfe og har ingen ladning som kan gi opphav til et oscillerende skalarpotensial (jfr. ladningsbevarelsen med $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$). Derfor kan vi nå se bort fra skalarpotensialet.

Videre har vi $\mathbf{A} = -\dfrac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c}\left(\dfrac{\sin\theta}{r}\right)\sin[\omega(t - r/c)]\hat{\boldsymbol{\phi}}$

når vi neglisjerer bidrag som går raskere mot null enn $1/r$ for $r \to \infty$. (Det er dessverre en fortegnsfeil i oppgitt uttrykk for **A**, minustegnet foran skal bort! Heldigvis kan den ikke medføre annet enn feil fortegn i svarene for **E** og **B**)

For elektrisk felt får vi: $\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \dfrac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\dfrac{\sin\theta}{r}\right)\cos[\omega(t - r/c)]\hat{\boldsymbol{\phi}}$

c) Magnetfeltet $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ beregnes ved bruk av oppgitt formel for curl i kulekoordinater. Når vi neglisjerer ledd som går mot null hurtigere enn $1/r$, får vi

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, A_\phi\right)\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$= -\frac{\partial A_\phi}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Poyntings vektor er

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{16\pi^2 c^3 r^2}\cos^2\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\hat{\mathbf{r}}\text{, med middelverdien}$$

$$<\mathbf{S}> = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{32\pi^2 c^3 r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

Når vi integrerer <**S**> over en kule med radius r får vi for total utstrålt effekt:

$$<P> = \oint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3}\int_0^\pi \sin^3\theta\, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3},$$

siden $d\mathbf{a} = r^2 \sin\theta\, d\theta d\phi\, \hat{\mathbf{r}}$. θ integralet beregnes enklest ved å innføre $x = \cos\theta$ som ny integrasjonsvariabel: $\int_0^\pi \sin^3\theta\, \mathrm{d}\theta = \int_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.

Sammenlignet med den elektriske dipolen har vi:

$$\frac{\langle P_{magn}\rangle}{\langle P_{el}\rangle} = \left(\frac{m_0}{p_0 c}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{c}b\right)^2 = (kb)^2 << 1$$

hvor vi har satt inn $p_0 = q_0\pi b$, $m_0 = \omega q_0 \pi b^2$ og bølgetallet $k = \omega / c$.

En elektrisk dipol med samme størrelse og samme strøm, har derfor mye mer effektiv utstråling enn en magnetisk (dipoltilnærmelsen er bare gyldig for kb << 1 i begge tilfeller).