

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Ola Hunderi

Tlf.: 93411

EKSAMEN I FAG 74435 - FASTE STOFFERS FYSIKK 2

Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

Fredag 18. desember 1998

Tid: 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne

O.Jahren og K.J. Knutsen: Formelsamling i matematikk

K. Rottmann: Matematische Formelsammlung/Matematisk formelsamling

S. Barrett og T.M. Cronin: Mathematical Formulae

O. Øgrim og B.E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk

Oppgave 1

- a) Energien i nærheten av sentrum av Brillouinsonen kan i en del tilfelle beskrives av følgende formel:

$$E(k)(1 + \alpha E(k)) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Her er α en konstant; den er i de fleste tilfeller liten.

Beregn tilstandstettheten $D(E)$ for:

- i) et endimensjonalt materiale av denne typen
 - ii) et tilsvarende todimensjonalt materiale
- b) Hva skjer med $D(E)$ for store verdier av E i disse tilfellene? Beregn også gruppehastigheten i de to tilfellene.
- c) Vi skal så se på tilstandstettheten i en tilnærmet fri elektrongass i to dimensjoner. Anta at gitteret er kubisk med gitterkonstant a og at potensialet er så svakt at elektronene tilnærmet kan betraktes som en fri elektrongass.
- i) I hvilket punkt i første BZ har elektronet høyest energi og hva er energien $E_{\max}$ i dette punktet?

- ii) Beregn så tilstandstettheten $D(E)$ i første Brillouinsone

Hint: Tenk deg at du starter å fylle tilstander i sentrum av Brillouinsonen og fyll så tilstander inntil hele første Brillouinsonen er fylt.

Oppgave 2

Når antakelsen om sterkt bundne elektroner benyttes, finner en at energien for et elektron i et periodisk gitter er gitt som

$$\varepsilon = \varepsilon_a - \gamma_0 - \sum_n e^{i\vec{k}\vec{\rho}_n} \gamma_n$$

hvor

$$\gamma_n = - \int \phi_a^* (\vec{r} + \vec{\rho}_n) V'(\vec{r}) \phi_a(\vec{r}) d^3r$$

$$H_0 \phi_a = \varepsilon_a \phi_a$$

$$V' = V_{\text{gitter}} - V_{\text{atom}} < 0$$

- Finn dispersjonsrelasjonen $\varepsilon(k)$ for et kubisk gitter i tre dimensjoner. Ta med nærmeste og nest nærmeste nabo i summen.
- Gjenta beregningen for et todimensjonalt heksagonalt gitter der avstanden til nærmeste nabo er a . Her summerer du bare opp til nærmeste nabo.

Oppgave 3

- Vis at syklotron-banen til et elektron i det reelle rom i et magnetfelt $\vec{B}$ er slik at projeksjonen av banen i et plan $\perp \vec{B}$ er likeformet med banen i k -rommet, men rotert 90° og skalert med en faktor. Hva er skaleringsfaktoren?
- Schrödinger-ligningen for et fritt elektron i et konstant magnetfelt B langs z -aksen er gitt av:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{ieBx}{\hbar} \right)^2 \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] = E\psi$$

Vis at denne ligningen har en løsning av formen $\psi(x, y, z) = f(x) e^{i(\Lambda y + K_z z)}$ og der funksjonen $f(x)$ tilfredsstiller ligningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{e^2 B^2}{2m} \left(x + \frac{\hbar \lambda}{eB} \right)^2 f(x) = E_0 f(x)$$

Dette er ligninger for en harmonisk oscillator med sentrum i $x_0 = -\frac{\hbar \lambda}{eB}$. Finn på denne måten energi-nivåene E .

- c) Bruk dette til å finne arealet i k -rommet innenfor syklotronbanen i et magnetfelt $\vec{B}$.

Oppgave 4

Vi skal se på de såkalte grenseflate plasmonene på grensa mellom to metaller. Metall 1 ($z > 0$) har en bulk plasmafrekvens lik ω_{p1} og metall 2 ($z < 0$) har en bulk plasmafrekvens lik ω_{p2} . En løsning av Laplace ligning i medium 1 er $\phi(x, z) = A \cos kx e^{-kz}$ for $z > 0$ og $\phi(x, z) = A \cos kx e^{+kz}$ for $z < 0$. E-feltet i de to områdene er gitt av $\vec{E} = -\nabla \phi$.

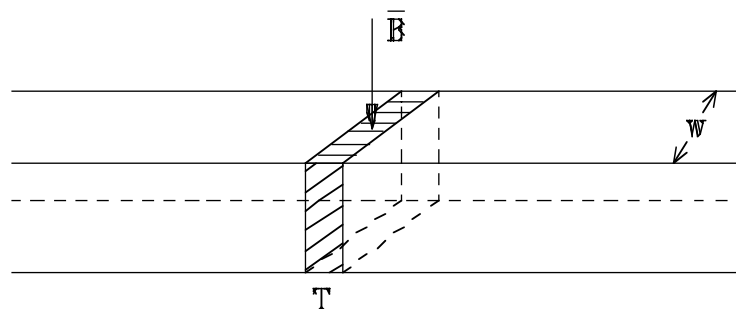
- a) Vis at potensialene ovenfor tilfredsstiller grensebetingelsen at den tangentielle komponenten av $\vec{E}$ er kontinuerlig over grenseflata. Vis at betingelsen at normalkomponenten av $\vec{D}$ skal være kontinuerlig fører til betingelsen $\epsilon_1 = -\epsilon_2$ der ϵ_1 er dielektrisitetskonstanten i medium 1 og ϵ_2 den tilsvarende i medium 2
- b) Vis videre at dette fører til at grenseflate-plasmonene har frekvensen

$$\omega = \left[\frac{1}{2} (\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2) \right]^{1/2}$$

Begge dielektrisitetskonstanter antas å være gitt av Drude-uttrykket.

Oppgave 5

Betrakt en Josephson-kontakt med rektangulært tverrsnitt og med et magnetfelt B som ligger i samme plan som kontakten, vinkelrett på kanten med bredde w slik som vist på figur 1.

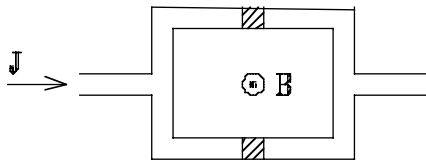


Figur 1

Vis at strømmen for $B \neq 0$ er gitt av

$$J = J_0 \frac{\sin wTBe/\hbar c}{wTBe/\hbar c}$$

Hint: To utgangspunkt i uttrykket for den makroskopiske kvante-interferens i en krets med to Josephson-kontakter.



Figur 2

Her er strømmen gitt som $J = 2J_0 \cos \frac{e\phi}{\hbar c}$. Her er for enkelhets skyld antatt at faseforskjellen mellom de to superlederne er $\pi/2$ når $B = 0$. Del kontakten i figur 1 en opp i mange sløyfer, slik som i figur 2, og summer.