

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Ola Hunderi

Tlf.: 93411

EKSAMEN I FAG SIF4062 – FASTSTOFFYSIKK VK

Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

Tirsdag 8. mai 2001

Tid: 0900-1500

Tillatte hjelpemidler: B2 - Typegodkjent kalkulator, med tomt minne

O.Jahren og K.J. Knutsen: Formelsamling i matematikk

K. Rottmann: Matematische Formelsammlung/Matematisk formelsamling

S. Barrett og T.M. Cronin: Mathematical Formulae

Sensur faller 29. mai 2001

Løs oppgave 1, 2 og enten 3 eller 4.

Oppgave 1

- a) Betrakt først et todimensjonalt, kvadratisk gitter. Vi ser først bort fra potensialet (empty lattice). Energien til et elektron i ett av hjørnene i Brillouinzonen er en faktor X større energien midt på zonekanten. Beregn X.
- b) Potensialet til dette materialet er gitt av

$$V(x,y) = -2V_0 \left(\cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{a} \right)$$

der V_0 er en konstant og a er gitterkonstanten. Finn energigapet midt på zonekanten og plot hvordan energibåndene varierer langs zonekanten.

- c) Anta at materialet er divalent og finn betingelsen for at systemet skal være metallisk.
- d) Na metall har bcc struktur og ett valens elektron pr. atom slik at første Brillouinzone ikke er fylt. Avstanden fra sentrum av Brillouinzonen til nærmeste punkt på kanten av zonen er $\sqrt{2} \cdot \pi/a$, der a er gitterkonstanten; $a = 0.423$ nm. Finn en formel som estimerer grensebølgelengden for "onset" av interbandovergangen fra det laveste band til det nest laveste band. Anta at k_F ligger så langt fra zonegrensen at vi kan se bort fra krystall-

potensialet og bruke "empty lattice" tilnærmelsen. Gi en kort begrunnelse for at "empty lattice" er en god tilnærmelse her.

Oppgave 2

- a) Vi skal se på et paramagnetisk system med bare to tilstander $J = S = \pm 1/2$. Vis at Brillouinfunksjonen i dette tilfellet tar formen

$$B_s(x) = \tanh(x)$$

$$\text{med } x = \frac{g\mu_B S \cdot B}{k_B T} = \frac{\mu_B \cdot B}{k_B T} \quad \text{for } g = 2, S = \frac{1}{2}.$$

Utlede Curie's lov for temperaturavhengigheten av susceptibiliteten.

- b) Vi skal så se på det tilsvarende ferromagnetiske tilfelle; $J = S = \pm 1/2$, $g = 2$. Gjør rede for Weiss hypotese og vis at magnetiseringen er gitt av

$$M = n\mu_B \tanh(\mu_B \mu_0 \lambda M / k_B T)$$

Forklar hvorfor spontan magnetisering bare er mulig under en kritisk temperatur T_c . Vis at den kritiske temperaturen er gitt av

$$T_c = \frac{n\mu_B^2 \mu_0 \lambda}{k_B}$$

- c) Vis at magnetiseringen ved svært lave temperaturer er gitt av uttrykket

$$M = n\mu_B(1 - 2e^{-2T_c/T})$$

Vis videre at magnetiseringen M like under T_c der M er liten er slik at $\tanh(x)$ kan rekkeutvikles, er gitt av

$$M = \sqrt{3} n\mu_B \frac{T}{T_c} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2}$$

- d) Betrakt til slutt området like over T_c . I dette tilfellet er

$$M = n\mu_B \tanh(\mu_B (B + \mu_0 \lambda M) / k_B T)$$

i det paramagnetiske omrde. Betrakt både B og M som små og utled derav Curie-Weiss lov for susceptibiliteten.

Oppgave 3

- a) Sett opp bevegelsesligningen for elektronene i en fri elektron gass i et ytre statisk elektrisk felt. Anta at levetiden (tiden mellom to støt) er τ . Løs ligningen og beregn den statiske elektriske ledningsevne σ_0 til en slik elektrongass. Vis at den tilsvarende AC ledningsevne er gitt av

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}$$

der ω er frekvensen til et elektriske feltet.

- b) Modellene ovenfor tar ikke hensyn til bandstruktur. I forelesningene har vi vist at den elektriske ledningsevnen i et reelt system er gitt av et integral

$$\sigma_{ii} = \frac{e^2}{4\pi^3} \int d\bar{k} v_i^2(k) \tau(k) \delta(E(k) - E_F)$$

$$i = (x, y, z)$$

Vis ut fra ligningen ovenfor at ledningsevnen til et materiale med kubisk symmetri er gitt av

$$\sigma = \frac{e^2}{12\pi^3\hbar} \tau(k_F) \langle v \rangle \cdot S$$

der S er arealet av Fermiflata. Hva er $\langle v \rangle$ i dette uttrykket? Kommenter kort hvordan σ avhenger av båndfyllingen; i.e. hvor stor del av et bånd som er fylt. Forklar hvorfor en situasjon der Fermiflata er så stor at den nesten berører zonekanten likevel resulterer i relativt lav σ .

- c) Anta nå at energien er gitt av

$$E(k) = \frac{\hbar^2}{2m_{\perp}} (k_x^2 + k_y^2) + \frac{\hbar^2}{2m_{\parallel}} k_z^2$$

Beregn σ_{xx} for dette materialet. Sammenlign beregningen med resultatet i a). Anta at Fermiflata i sin helhet ligger innenfor første Brillouinzone.

- d) Gjenta beregningen for σ_{zz} .

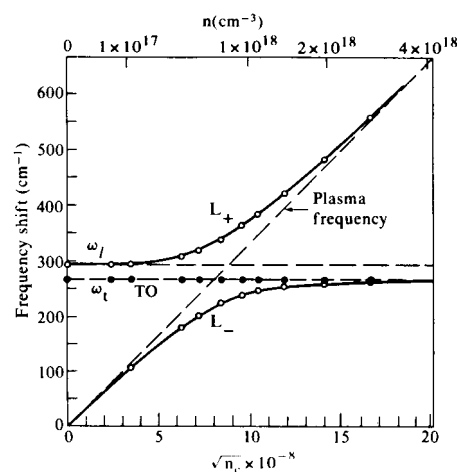
Oppgave 4

Anta at vi har et materiale (alkali halid) med $\epsilon(0) = 5.9$, $\epsilon(\infty) = 2.25$ og der reflektansen $R = 0$ ved $\lambda = 3.07 \mu\text{m}$. Anta videre at dempningen i materialet er neglisjerbar.

- a) Finn ω_L og ω_T .
- b) Vi skal i denne delen av oppgaven se på kobling mellom plasmoner og optiske fononer. Figuren viser resultater fra eksperimenter der plasmafrequensen i GaAs ble variert ved å bruke prøver med ulik doping. På denne måten ble plasmafrequensen variert fra under til over TO-fonon frekvensen. Vis at dielektrisitetskonstanten i dette tilfelle er gitt av

$$\epsilon(\omega) = \epsilon(\infty) + \frac{(\epsilon(0) - \epsilon(\infty))\omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

- c) Ta utgangspunkt i Maxwells ligninger og vis at betingelsen for at longitudinale bølger kan eksistere i systemet er at $\epsilon(\omega) = 0$. Vis at de longitudinale modene kvalitativt varierer med ladningstettheten som angitt på figuren.



Figur.

- d) Anta at vi har et materiale der dielektrisitetskonstanten har flere poler, slik at $\epsilon(\omega)$ er gitt av

$$\epsilon(\omega) = A + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{\omega^2 - \omega_{T,i}^2}$$

Vis at dette fører til en generalisert Lyddane-Sachs-Teller relasjon av formen

$$\frac{\epsilon(0)}{\epsilon(\infty)} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\omega_{L,i}}{\omega_{T,i}} \right)^2$$

der $\omega_{L,i}$ er frekvensene der $\varepsilon(\omega) = 0$.

Hint: Skriv $\varepsilon(\omega) = 0$ som et n -te grads polynom i ω^2 og gjør bruk av at produktet av alle røttene i polynomet er gitt av konstantleddet.