

Løsningsforslag, eksamen 16. januar 1998

Oppgave 1

a) Energien er gitt av

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 - \alpha - \sum_n e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n} \cdot \gamma_n$$

γ_n er den samme for alle de nærmeste naboene; γ

$$\Rightarrow \varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 - \alpha - \gamma \sum_{\text{naboer}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n}$$

Posisjonene til de nærmeste naboene i et kubisk gitter er $\pm a\sqrt{0,0,0}$; $0, \pm a\sqrt{0,0,0}$ og $0,0, \pm a\sqrt{0,0,0}$.

Setter vi dette inn fås:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon_0 - \alpha - 2\gamma(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a)$$

FIGUR!!!

b) Bunnen av energibåndet finner vi for små verdier av k_x, k_y, k_z .

Dersom vi rekkeutvikler cos-funksjonene for små verdier fås $\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$.

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}) &= \varepsilon_0 - \alpha - 2\gamma\left(3 - \frac{1}{2}a^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\right) \\ &= \varepsilon_0 - \alpha - 6\gamma + \gamma a^2 k^2 \end{aligned}$$

Toppen a båndet finner vi i hjørnet av BZ $\mathbf{k} = (\pi/a, \pi/a, \pi/a)$

Sett $k_x = \pi/a - \delta k_x$ osv.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}) &= \varepsilon_0 - \alpha - 2\gamma\left(-3 + \frac{1}{2}a^2(\delta k_x^2 + \delta k_y^2 + \delta k_z^2)\right) \\ &= \varepsilon_0 - \alpha + 6\gamma - \gamma a^2 \delta k^2 \end{aligned}$$

Fra dette ser vi med en gang at den effektive masse nær bunnen er

$$m^* = \frac{\hbar^2}{2\gamma a^2}$$

og nær toppen

$$m^* = -\frac{\hbar^2}{2\gamma a^2}$$

c) FIGUR!!!

Kubisk struktur: Laveste basis-vektorer i 2 dim: (0,0), (1,0), (0,1), (1,1) ...

$$\text{Energier gitt av } E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{k} - \mathbf{G})^2$$

I punkt (1) er (0,0) og (1,0) degenererte.

I punkt (2) er (0,0) og (1,1) degenererte.

FIGUR!!!

Potensialet er

$$\begin{aligned} V(x, y) &= -4U \cos 2\pi x/a \cdot \cos 2\pi y/a \\ &= -U(e^{2\pi i x/a + 2\pi i y/a} + e^{-2\pi i x/a - 2\pi i y/a} + e^{2\pi i x/a - 2\pi i y/a} + e^{-2\pi i x/a + 2\pi i y/a}) \end{aligned}$$

$$= -U((1,1) + (1,-1) + (-1,1) + (-1,-1))$$

I punktet $(\pi/a, \pi/a)$ er $(0,0)$, $(1,1)$ og $(1,0)$, $(0,1)$ degenererte.

Dette gir sentralligningen

	0 0	1 1	1 0	0 1
0 0	$E_{00}-\lambda$	U_{11}	0	0
1 1	U_{11}	$E_{11}-\lambda$	0	0
1 0	0	0	$E_{10}-\lambda$	U_{11}
0 1	0	0	U_{11}	$E_{01}-\lambda$

NB! $U_{10} = 0$, $U_{11} = -U$

Dette reduseres til to 2x2 determinanter.

$E_{00} = E_{11} = E_{01} = E_{10}$ i punktet $(\pi/a, \pi/a)$

$$E_{00} = \frac{h^2}{2m} \cdot 2 \cdot \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

$$\begin{vmatrix} E_{00} - \lambda & -U \\ -U & E_{00} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(E_{00} - \lambda)^2 - U^2 = 0 \quad \lambda = E_{00} \pm U$$

Oppgave 2

a) FIGUR!!!

Ligningen for ellipsoiden skrives på formen

$$\frac{k_x^2}{m_{11} 2E/h^2} + \frac{k_y^2}{m_{22} 2E/h^2} + \frac{k_z^2}{m_{33} 2E/h^2} = 1$$

Volumet av energi-ellipsoiden er da gitt som

$$V_k = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2E}{h^2}\right)^{3/2} \sqrt{m_{11} m_{22} m_{33}}$$

Antall tilstander er da

$$N_k = 2 \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} V_k = \frac{2V}{8\pi^3} \cdot \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2E}{h^2}\right)^{3/2} \sqrt{m_{11} m_{22} m_{33}}$$

$$D(E) = \frac{\partial N}{\partial E} = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m^*}{h^2}\right)^{3/2} E^{1/2}$$

$$\text{med } m^* = (m_{11} m_{22} m_{33})^{1/3}$$

b) FIGUR!!!

Vi har vist i forelesningene at syklotron-massen er gitt av uttrykket

$$\omega_c = \frac{2\pi eB}{h^2} \left/ \left(\frac{\partial A}{\partial \epsilon} \right) \right.$$

Syklotronfrekvensen bestemmes av de ekstreme orbitalene. Her er da

$$A_k^{\text{ext}} = \pi \sqrt{\frac{2m_t E}{h^2}} \cdot \sqrt{\frac{2m_l E}{h^2}} = \frac{2\pi m_t E}{h^2}$$

$$\omega_c = \frac{2\pi eB}{h^2} \frac{1}{\frac{\partial A_k}{\partial E}} = \frac{2\pi eB}{h^2} \frac{h^2}{2\pi m_t} = \frac{eB}{m_t}$$

c) Arealet i k-rommet

$$A_k = \sqrt{\frac{2Em_t}{h^2}} \cdot \sqrt{\frac{2E}{h^2}} \cdot \frac{\pi}{\left[\frac{\cos^2 \theta}{m_t} + \frac{\sin^2 \theta}{m_l} \right]^{1/2}}$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial E} = \frac{2}{h^2} \frac{\pi}{\left[\frac{\cos^2 \theta}{m_t^2} + \frac{\sin^2 \theta}{m_t m_l} \right]^{1/2}}$$

$$\omega_c = \frac{2\pi eB}{h^2} \cdot \frac{1}{\frac{\partial A_k}{\partial E}} = eB \left[\frac{\cos^2 \theta}{m_t^2} + \frac{\sin^2 \theta}{m_t m_l} \right]^{1/2}$$

Oppgave 3

a) Fra Maxwells ligninger har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla E = \rho_{\text{ind}} / \epsilon_0$$

For Fourierkomponentene fås da med $D = \epsilon \cdot E$

$$ik \cdot E(k, \omega) = 0$$

$$ikE = \rho_{\text{ind}}(k, \omega) / \epsilon_0$$

Disse to ligningene forteller oss at den eneste mulighet for en løsning der $E \neq 0$ er dersom $\epsilon(k, \omega) = 0$.

b) Fra potensialet $\phi = A \cos kx \cdot e^{-kz}$ fås et felt i metallet:

$$E_x^m = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = kA \sin kx \cdot e^{-kz}$$

$$E_z^m = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = kA \cos kx \cdot e^{-kz}$$

og i vakuum fås

$$E_x^0 = -\frac{\partial \phi_0}{\partial x} = kA \sin kx \cdot e^{kz}$$

$$E_z^0 = -\frac{\partial \phi_0}{\partial z} = -kA \cos kx \cdot e^{kz}$$

kontinuitetsbet. for $z = 0$

$$E_{||} \text{ kontinuerlig: } E_x^0 = E_x^m$$

$$\Rightarrow kA \sin kx = kA \sin x \quad \text{OK}$$

D_n kontinuerlig. $D = \epsilon E$

$$\Rightarrow \epsilon k A \cos kx = -k A \cos kx$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\epsilon = -1}}$$

For fri elektroner har vi $\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$

$$\Rightarrow \epsilon = -1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \Rightarrow \omega_s^2 = \frac{\omega_p^2}{2}$$

c) Løsning i gapet:

$$\phi = f(z) e^{i(k_x x + k_y y)}$$

Innsatt i LaPlace $\nabla^2 \phi = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - (k_x^2 + k_y^2) f = 0$$

Denne ligning har løsning

$$f(z) = A e^{kz} + B e^{-kz} \quad \text{med} \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

Vi skal bruke den symmetriske løsningen der $A = B$.

$$f(z) = A(e^{kz} + e^{-kz})$$

I metallet må løsningen være av formen

$$\phi = C \cdot e^{-kz} e^{ik_x x + ik_y y} \quad \text{for } z \geq d$$

og

$$\phi = C \cdot e^{kz} e^{ik_x x + ik_y y} \quad \text{for } z \leq d$$

Grensebet. for $z = +d$

E_{tang} kontinuerlig $\Rightarrow$

$$A(e^{+kd} + e^{-kd}) = C \cdot e^{-kd}$$

D_n kontinuerlig $\Rightarrow$ med $D = \epsilon E$

$$kA(e^{kd} - e^{-kd}) = -\epsilon C e^{-kd}$$

Dividerer disse to ligningene med hverandre

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{e^{kd} - e^{-kd}}{e^{kd} + e^{-kd}}$$

$$\underline{\underline{\epsilon = -\tanh kd}}$$

Oppgave 4

a) Kramers-Kronig relasjonene for en kompleks responsfunksjon $\alpha(\omega) = \alpha_1 + i\alpha_2$ lyder:

$$\alpha_2(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\alpha_1(s)}{s^2 - \omega^2} ds$$

Her $\alpha \rightarrow \sigma$ med $\sigma_1 = \Omega_p^2 \delta(\omega)$

$\Rightarrow$

$$\sigma_2(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\Omega_p^2 \delta(s)}{s^2 - \omega^2} ds$$

$$= \frac{2}{\pi\omega} \Omega_p^2$$

Setter vi dette inn i den oppgitte formelen fås:

$$T(\omega) = \frac{1}{\left(1 + \frac{d \cdot z \cdot \Omega_p^2 \delta(\omega)}{2}\right)^2 + \left(\frac{d \cdot z \cdot \Omega_p^2}{\pi \omega}\right)^2}$$

For $\omega \neq 0$ er $\delta(\omega) = 0$

$$\Rightarrow T(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{d \cdot z \cdot \Omega_p^2}{\pi \omega}\right)^2}$$

b) Fra London-ligningen $\nabla^2 B = B/\lambda_L^2$ har vi løsninger av formen $B \sim e^{\pm x/\lambda_L}$ på begge sider av plata.

FIGUR!!!

Dermed blir feltet $B(x) = K(e^{x/\lambda_L} + e^{-x/\lambda_L})$.

Konstanten er bestemt av at feltet på overflaten skal være B_a .

$$\Rightarrow B(x) = B_a \frac{e^{x/\lambda_L} + e^{-x/\lambda_L}}{e^{\delta/2\lambda_L} + e^{-\delta/2\lambda_L}} = B_a \frac{\cosh x/\lambda_L}{\cosh \delta/2\lambda_L}$$

c) For $\delta \ll \lambda_L$ kan vi rekkeutvikle eksponentialfunksjonen. Dette gir

$$B(x) \approx B_a \frac{1 + x^2/2\lambda_L^2}{1 + \delta^2/8\lambda_L^2} \approx B_a \left(1 + \frac{x^2}{2\lambda_L^2} - \frac{\delta^2}{8\lambda_L^2}\right)$$

$$B(x) - B_a = \mu_0 M(x) = -\frac{B_a}{8\lambda_L^2}(\delta^2 - 4x^2)$$