

Løsningsforslag, eksamen 18. desember 1998

Oppgave 1

a) I det generelle tilfelle kan man ta utgangspunkt i uttrykket

$$D_n(E) = \frac{2}{(2\pi)^n} \int d^n k \delta(E - E(k))$$

Men ut fra geometriske betraktninger av antall tilstander mellom E og $E + dE$ ser vi at

2 dim:

$$D(E) = \frac{2\pi k}{dE/dk} \cdot \frac{2}{(2\pi)^2}$$

Fra $E(k)(1 + \alpha E(k)) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ får vi

$$\frac{dE}{dk} (1 + 2\alpha E(k)) = \frac{\hbar^2 k}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{dE/dk} = \frac{m}{\hbar^2} (1 + 2\alpha E(k))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D(E) &= \frac{2\pi m}{\hbar^2} (1 + 2\alpha E) \cdot \frac{2}{4\pi^2} \\ &= \frac{m}{\pi \hbar^2} (1 + 2\alpha E) \end{aligned}$$

1 dim: (Tilstander ved $\pm k$; $E = \frac{\hbar^2 (\pm k)^2}{2m} \Rightarrow$ faktor 2)

$$D(E) = \frac{2}{2\pi} \frac{2}{dE/dk} = \frac{2m}{\hbar^2 k} (1 + 2\alpha E) \cdot \frac{2}{2\pi}$$

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E(1 + \alpha E) \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E(1 + \alpha E)}$$

$$D(E) = \frac{1}{\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1 + 2\alpha E}{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E(1 + \alpha E)}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \frac{1 + 2\alpha E}{\sqrt{E(1 + \alpha E)}}$$

b) For store verdier av E får vi følgende grenser

$$2 \text{ dim} \quad D(E) \rightarrow \frac{m}{\pi \hbar^2} \cdot 2\alpha E \quad \sim E$$

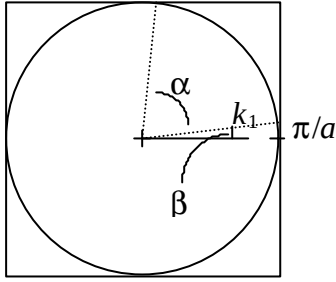
$$1 \text{ dim} \quad D(E) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \cdot 2\sqrt{\alpha} \quad \sim \text{konstant}$$

Gruppehastigheten er gitt av $v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k}$

$$1 \text{ \& } 2 \text{ dim: } v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\hbar^2}{m} \frac{k}{1 + 2\alpha E} = \frac{\hbar}{m} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \frac{\sqrt{E(1 + \alpha E)}}{1 + 2\alpha E}$$

For store E går v_g mot en konstant $= \frac{1}{\sqrt{2m\alpha}}$

c)



Elektronene har høyest energi i hjørnene av BZ. Der er energien

$$E_{\max} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \right) = \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2$$

Tilstandstettheten for små energier er som i en fri elektrongass $\frac{m}{\pi \hbar^2}$

For energier større enn energien på midten av en sidekant av BZ, f.eks. punktet $(\pi/a, 0)$, vil vi få mindre faserom tilgjengelig, mindre antall tilstander innenfor et energi-intervall dE . Vi får skalert

resultatet $\frac{m}{\pi \hbar^2}$ med vinkelen α .

$$\alpha = 90 - 2\beta, \quad \cos \beta = \frac{\pi/a}{k_1} = \frac{\pi/a}{\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}$$

$$\sin \alpha = \cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = \frac{2E(\pi/a)}{E} - 1$$

$$D(E) = \frac{m}{\hbar^2 \pi} \frac{\alpha}{\pi/2} = \frac{m}{\pi \hbar^2} \frac{\arcsin \left(2 \frac{E_{\pi/a}}{E} - 1 \right)}{\pi/2}$$

Vi ser at $D(E) = 0$ for $2E_{\pi/a}$, dvs. i hjørnet av BZ.

Oppgave 2

$$\varepsilon = \varepsilon_a + \gamma_0 - \sum_n e^{i\vec{k}\vec{p}_n} \gamma_n$$

a) Her skal vi ta med både nærmeste og nest nærmeste nabo. Nærmeste naboer ligger i posisjonene $(\pm 1, 0, 0)a$, $(0, \pm 1, 0)a$ og $(0, 0, \pm 1)a$.

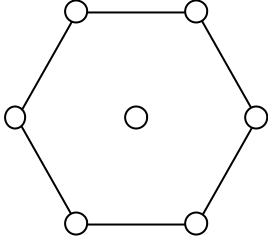
Nest nærmeste naboer ligger i avstanden $a\sqrt{2}$ og har koordinater $(\pm 1, \pm 1, 0)a$, $(\pm 1, 0, \pm 1)a$ og $(0, \pm 1, \pm 1)a$. Dette gir:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_a + \gamma_0 - \left[e^{ik_x a} + e^{-ik_x a} + e^{ik_y a} + e^{-ik_y a} + e^{ik_z a} + e^{-ik_z a} \right] \gamma_1 \\ &\quad - \left[e^{i(k_x \pm k_y)a} + e^{-i(k_x \pm k_y)a} + e^{i(k_x \pm k_z)a} + e^{-i(k_x \pm k_z)a} + e^{i(k_y \pm k_z)a} + e^{-i(k_y \pm k_z)a} \right] \gamma_2 \\ &= \varepsilon_a + \gamma_0 - 2\gamma_1 [\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a] - 2\gamma_2 [\cos(k_x + k_y)a + \cos(k_x - k_y)a \\ &\quad + \cos(k_x + k_z)a + \cos(k_x - k_z)a + \cos(k_y + k_z)a + \cos(k_y - k_z)a] \end{aligned}$$

Dette kan også skrives på formen

$$\begin{aligned}\varepsilon = \varepsilon_a + \gamma_0 - 2\gamma_1 \left[\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a \right] \\ - 4\gamma \left[\cos k_x a \cdot \cos k_y a + \cos k_x a \cdot \cos k_z a + \cos k_y a \cdot \cos k_z a \right]\end{aligned}$$

b)



Koordinatene til de nærmeste naboene er

$$(\pm 1, 0)a, \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$$

Dette gir for energiene

$$\begin{aligned}\varepsilon = \varepsilon_0 + \gamma_0 - \gamma_1 \left[e^{ik_x a} + e^{-ik_x a} + e^{i\left(\frac{k_x a}{2} + \frac{k_y \sqrt{3}a}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{k_x a}{2} + \frac{k_y \sqrt{3}a}{2}\right)} \right. \\ \left. + e^{i\left(\frac{k_x a}{2} - \frac{k_y \sqrt{3}a}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{k_x a}{2} - \frac{k_y \sqrt{3}a}{2}\right)} \right] \\ = \varepsilon_0 + \gamma_0 - \gamma_1 \cdot 2 \cos k_x a + \cos\left(\frac{k_x a}{2} + \frac{k_y}{2} \sqrt{3}a\right) + \cos\left(\frac{k_x a}{2} - \frac{k_y}{2} \sqrt{3}a\right) \\ = \varepsilon_0 + \gamma_0 - \gamma_1 \cdot 2 \left[\cos k_x a + \cos \frac{k_x a}{2} \cos \frac{k_y \sqrt{3}a}{2} \right]\end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Bevegelsesligningen i et plan $\perp \vec{B}$ feltet er gitt av

$$m\dot{\vec{v}} = e(\vec{v} \times \vec{B})$$

Videre er $m\vec{v} = \hbar \vec{k}$

$$\hbar \dot{\vec{k}} = e(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = e\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}\right)$$

Denne integreres og gir

$$\hbar \vec{k}(t) = e(\vec{r}(t) \times \vec{B})$$

Dette viser at bane i k-rommet er likeformet med banen i r-rommet og skalert med faktoren

$$\frac{eB}{\hbar}.$$

b) Vi setter prøveløsningen inn i Schrödinger ligningen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{ieBx}{\hbar} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] e^{i(\lambda y + k_z z)} f(x) = E e^{i(\lambda y + k_z z)} f(x)$$

Utfører vi derivasjon m.h.p. y og z får vi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(i\lambda + \frac{ieBx}{\hbar} \right)^2 - k_z^2 \right] f(x) = E f(x)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{e^2 B^2}{2m} \left(x + \frac{\hbar\lambda}{eB} \right)^2 f(x) = \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right) f(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{e^2 B^2}{2m} \left(x + \frac{\hbar\lambda}{eB} \right)^2 f(x) = E_0 f(x)$$

Dette siste er ligningen for en harmonisk oscillator $\Rightarrow E_0 = \hbar\omega_0(n + 1/2)$

og totalenergien er da gitt som

$$E = \hbar\omega_0(n + 1/2) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

$$\omega_0 = \omega_c = \frac{eB}{m}$$

c) Arealet i k -rommet er nå gitt av følgende: Vi ser bare på ekstremalbanene der $k_z = 0$.

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \equiv \hbar\omega_c(n + 1/2)$$

$$S_n = \pi k^2 = \pi \frac{2m\omega_c}{\hbar} (n + 1/2) = \pi \frac{2m}{\hbar} \frac{eB}{m} (n + 1/2) = \frac{2\pi eB}{\hbar} (n + 1/2)$$

Oppgave 4

a) Fra $\vec{E} = -\nabla\phi$ får vi at $E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$

$$\Rightarrow E_{1x} = -\frac{\partial}{\partial x} (A \cos kx e^{-kz})_{z=0} = A \sin kx$$

$$E_{2x}(z=0) = -\frac{\partial}{\partial x} (A \cos kx e^{+kz})_{z=0} = A \sin kx$$

$$E_{1x} = E_{2x} ; \quad E_{\text{tang}} \equiv \text{kontinuerlig.}$$

$$D_n = E_z = \epsilon E_z$$

$$\Rightarrow D_1(z=0) = -\frac{\partial}{\partial z} \phi(x, z) \Big|_{z=0} \epsilon_1 = \epsilon_1 k A \cos kx$$

$$D_2(z=0) = -\frac{\partial}{\partial z} \phi(x, z) \Big|_{z=0} \epsilon_2 = -\epsilon_2 k A \cos kx$$

Dermed gir kontinuitetstesten for D_n

$$\epsilon_1 = -\epsilon_2$$

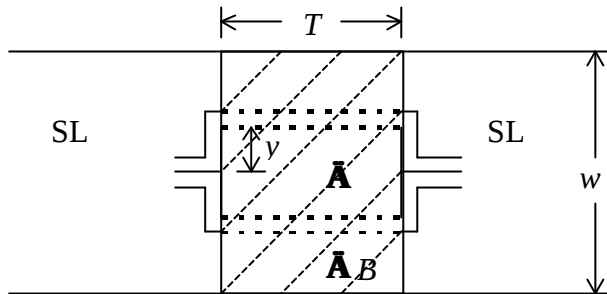
b) Med Drude fås:

$$1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} = - \left(1 - \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2} \right)$$

$$2 = \frac{\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \left[\frac{1}{2} (\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2) \right]^{1/2}$$

Oppgave 5

Vi deler Josephson-kontakten inn i små sløyfer



Fluksen gjennom denne tenkte sløyfa er

$$\phi(y) = 2yTB$$

og strømmen er proporsjonal med dy .

$$\Rightarrow dJ = 2J_0 \cos\left(\frac{2eyTB}{\hbar c}\right) dy / w$$

Dette integreres fra $-w/2$ til $+w/2$

$$\begin{aligned} J &= \frac{2J_0}{w} \int_0^{w/2} \cos \frac{2eyTB}{\hbar c} dy \\ &= \frac{J_0}{\frac{eTBw}{\hbar c}} \left. \sin \frac{2eyTB}{\hbar c} \right|_0^{w/2} \\ &= J_0 \frac{\sin ewTB/\hbar c}{ewTB/\hbar c} \end{aligned}$$