



NTNU – Trondheim
Norwegian University of
Science and Technology

Department of **Physics**

Examination paper for TFY4280 Signal Processing

Academic contact during examination: Pawel Sikorski

Phone: 98486426

Examination date: 24.05.2013

Examination time (from-to): 0900 - 1300

Permitted examination support material:

- Simple calculator (according to NTNU exam regulations)
- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (eller tilsvarende)
- Barnett and Cronin: Mathematical formulae
- Carl Angell og Bjørn Ebbe Lian: Fysiske størrelser og enheter, navn og symboler (eller tilsvarende)

Other information:

Language: English/Bokmål

Number of pages: 12

Number of pages enclosed: 0

Checked by:

Date

Signature

NORWEGIAN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Department of Physics

Contacts during the exam:
Pawel Sikorski, phone: 98486426

EXAM (English) TFY4280 Signal Processing

Friday 24th of May 2013. 09:00 - 13:00

Examination support materials:

- Simple calculator (according to NTNU exam regulations)
- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (eller tilsvarende)
- Barnett and Cronin: Mathematical formulae
- Carl Angell og Bjørn Ebbe Lian: Fysiske størrelser og enheter, navn og symboler (eller tilsvarende)

Answer must be written in English or Norwegian. Number of points given to each sub-question is given in bold font. The maximum score for the exam is **100p**. The exam consists of 4 questions. **Attachment:** 2 pages with transform tables and properties.

Q1 (25p) For a LTI system with unknown characteristics, a signal $x(t) = \varepsilon(t - t_0) - \varepsilon(t - t_1)$ results in a output $y(t)$ given by:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \varepsilon(t - t_1) (e^{-(t-t_1)/2} - 1) - \varepsilon(t - t_0) (e^{-(t-t_0)/2} - 1)$$

- A) **(10p)** Find the impulse response function $h(t)$ for this system.
- B) **(10p)** Find the frequency response $|H(j\omega)|$ for $\omega = 1, 10, 100\text{Hz}$
- C) **(5p)** Explain what is usually called by a term “white noise”? Explain how such noise signal $n(t)$ could be used to obtain $h(t)$ for LTI system with unknown characteristics.

Q2 (25p) Consider the following difference equation and excitation $x[n]$ (input signal):

$$y[n] - 0.7y[n - 1] + 0.1y[n - 2] = x[n] + x[n - 1]$$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 2 \\ 0 & n \neq 2 \end{cases}$$

- A) **(10p)** Find $y[n]$ using z-transform.
- B) **(5p)** Verify by solving $y[n]$ directly using the difference equation or by using long division.

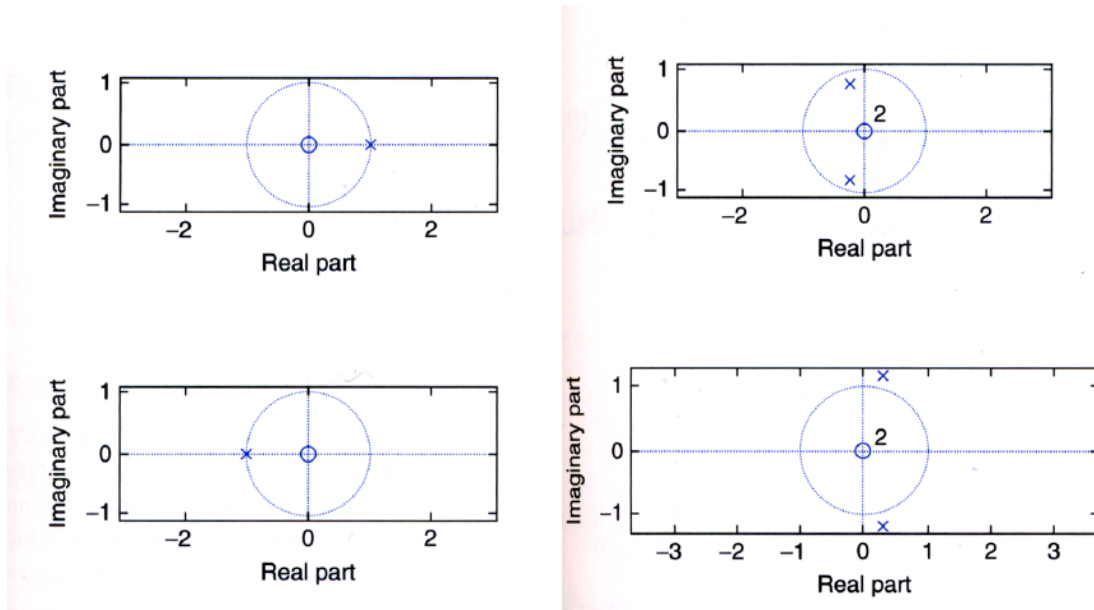


Figure 1: Q2c

- C) (10p) Consider 4 different signals, z-transforms of which have been represented on the z-plane below. Sketch approximate discrete time signals corresponding to those transforms. Explain the difference between discrete time frequency and continuous time frequency.

Q3 (25p) Train of delta impulses δ_T is defined by:

$$\delta_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

where T_s is the time delay between consecutive impulses.

- A) (10p) Given that the Fourier transform $F_s(\omega)$ of sampled function $f_s(t)$ is given by :

$$\begin{aligned} f_s(t) &= f(t)\delta_T(t) \\ F_s(\omega) &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \end{aligned}$$

explain how to reconstruct the continuous-time domain function $f(t)$ from $f_s(t)$. What criteria must be satisfied by $f_s(t)$ and/or $f(t)$ for this to be possible?

- B) (15p) Define DTFT (Discrete Time Fourier Transform) and DFT (Discrete Fourier Transform) of the sampled signal $f_s(t)$ and calculate DTFT for

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 < n < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Can you use the answer to write the expression for DFT of the same signal?.

Q4 (25p) The scheme below illustrates a simple high pass filter.

- A) (10p) Find the relationship between input $v_i(t)$ and the output $v_o(t)$ signals for this filter.

- B) **(10p)** You would now like to design discrete time-domain (DSP) filter with similar characteristics. Derive the difference equation for this system and draw a block diagram for DSP filter.
- C) **(5p)** Write the z-transform of the transfer function. Calculate impulse response $h[n]$ with $0 \leq n < 3$ for this DSP filter using a method of choice.

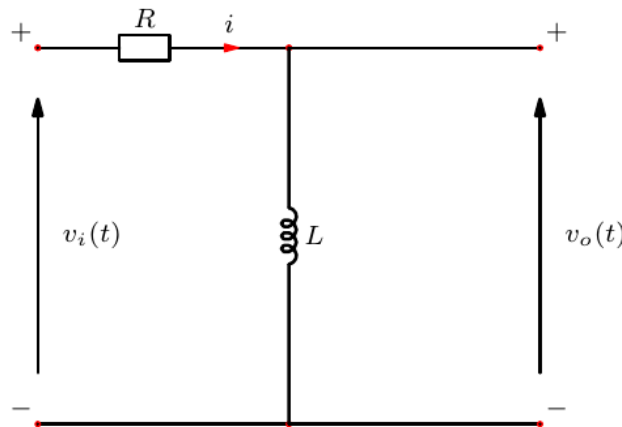


Figure 2: High pass filter circuit in Question 4

Fourier Series

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Fourier Transform

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Fourier transform of a periodic function:

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_0} F(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0)$$

Figure 3: some useful formulas

NORWEGIAN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Department of Physics

Kontakt under eksamen:
Pawel Sikorski, phone: 98486426

EXAMEN (Bokmål) TFY4280 Signalanalyse

Friday 24th of May 2013. 09:00 - 13:00

Tillatte hjelpemidler:

- Enkel kalkulator (i følge eksamensreglementet ved NTNU)
- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (eller tilsvarende)
- Barnett and Cronin: Mathematical formulae
- Carl Angell og Bjørn Ebbe Lian: Fysiske størrelser og enheter, navn og symboler (eller tilsvarende)

Besvarelsen leveres på norsk eller engelsk. Antall poeng for hvert delspørsmål er gitt i uthevet font. Maksimalt antall poeng for hele eksamen er 100. Eksamen består av 4 oppgaver. Vedlegg: 2 sider med tabeller og egenskaper til transformasjonsfunksjoner.

S1 (25p) For et LTI-system med ukjente egenskaper, vil et signal $x(t) = \varepsilon(t - t_0) - \varepsilon(t - t_1)$ resultere i et utgangssignal $y(t)$ gitt ved:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \varepsilon(t - t_1) (e^{-(t-t_1)/2} - 1) - \varepsilon(t - t_0) (e^{-(t-t_0)/2} - 1)$$

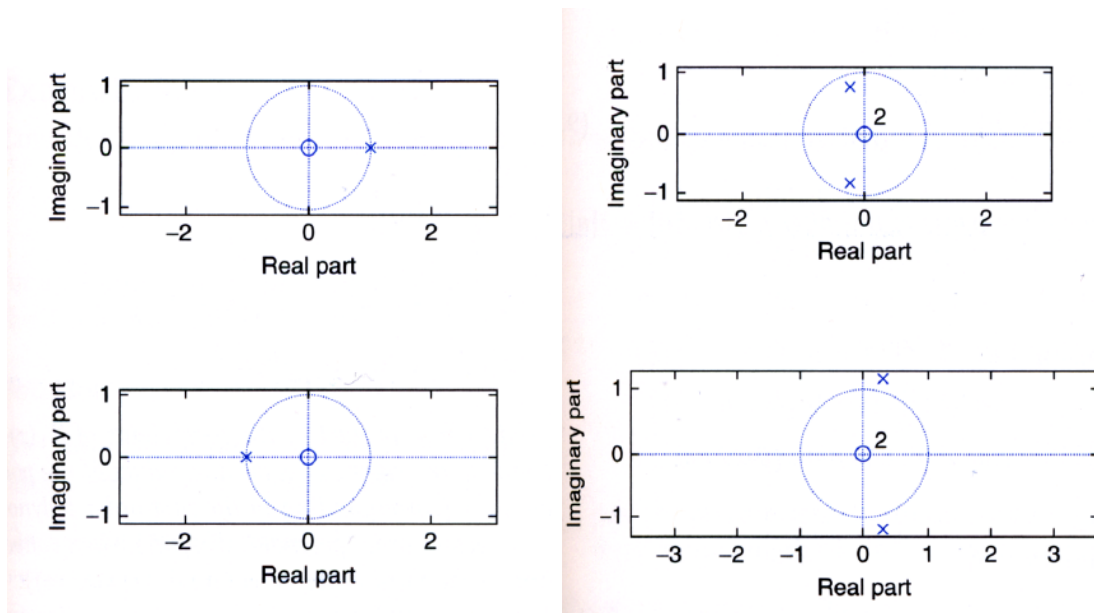
- A) (10p)** Finn impulsresponsfunksjonen $h(t)$ for dette systemet.
- B) (10p)** Finn frekvensresponsen (frequency response) $|H(j\omega)|$ for $\omega = 1, 10, 100\text{Hz}$
- C) (5p)** Forklar hva som vanligvis kalles hvit støy ("white noise")? Forklar hvordan et slikt signal $n(t)$ kan brukes til å oppnå $h(t)$ for LTI-system med ukjente egenskaper.

S2 (25p) Vurder følgende differensligning ("difference equation") og eksitasjon $x[n]$ (inngangssignal):

$$y[n] - 0.7y[n - 1] + 0.1y[n - 2] = x[n] + x[n - 1]$$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 2 \\ 0 & n \neq 2 \end{cases}$$

- A) (10p)** Finn $y[n]$ med bruk av z-transform.
- B) (5p)** Bekreft A) ved å løse $y[n]$ direkte ved hjelp av differensligningen ("difference equation"), eller ved hjelp av "long division".



Figur 4: Q2c

C) (10p) Z-transformasjoner av 4 ulike signaler har blitt representert i z-planet under. Skisser diskrete signaler som tilsvarende disse transformasjonene. Forklar forskjellen mellom diskret tidsfrekvens og kontinuerlig tidsfrekvens.

S3 (25p) En strøm av delta impulser ("Train of delta impulses") er definert ved

$$\delta_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

der T_s er tidsforsinkelsen mellom påfølgende impulser.

A) (10p) Gitt at Fourier transform $F_s(\omega)$ av en samplet funksjon $f_s(t)$ er gitt ved:

$$\begin{aligned} f_s(t) &= f(t)\delta_T(t) \\ F_s(\omega) &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \end{aligned}$$

forklar hvordan man kan rekonstruere kontinuerlig tidsdomenefunksjon $f(t)$ fra $f_s(t)$. Hvilke kriterier må være oppfylt av $f_s(t)$ og/eller $f(t)$ for at dette skal være mulig?

B) (15p) Definer DTFT (Discrete Time Fourier Transform) og DFT (Discrete Fourier Transform) av samplet signal $f_s(t)$ og beregn DTFT for

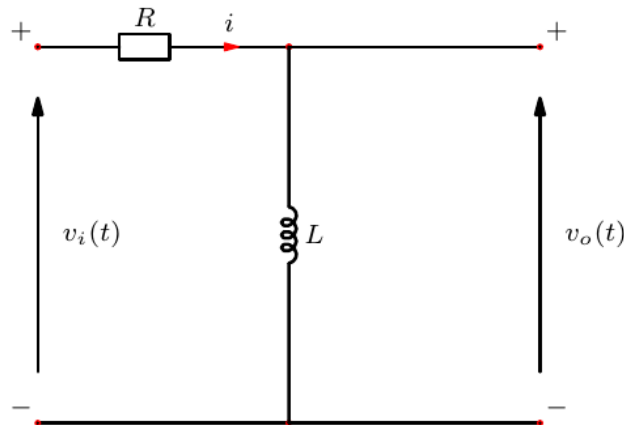
$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 < n < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Kan du bruke svaret til å skrive uttrykket for DFT av samme signal?

S4 (25p) Diagrammet under viser et enkelt høypassfilter.

A) (10p) Finn forholdet mellom inn $v_i(t)$ og utgang $v_o(t)$ signaler for dette filteret.

- B) **(10p)** Du ønsker nå å designe diskret tidsdomene (DSP) filter med tilsvarende egenskaper. Utled differensligningen ("difference equation") for dette systemet og tegn et blokkdiagram for DSP filter.
- C) **(5p)** Skriv z-transformen av overføringsfunksjonen. Beregn impulsresponsen $h[n]$ med $0 \leq n < 3$ for DSP-filter ved hjelp av en valgfri metode.



Figur 5: Høypassfilter; spørsmål 4

Fourier Series

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Fourier Transform

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Fourier transform av en periodisk funksjon:

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_0} F(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0)$$

Figur 6: nyttige formler

NORWEGIAN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Department of Physics

Kontakt under eksamen:
Pawel Sikorski, phone: 98486426

EXAM (Nynorsk) TFY4280 Signalanalyse

Friday 24th of May 2013. 09:00 - 13:00

Tillatte hjelpemidler:

- Enkel kalkulator (i følge eksamensreglementet ved NTNU)
- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (eller tilsvarende)
- Barnett and Cronin: Mathematical formulae
- Carl Angell og Bjørn Ebbe Lian: Fysiske størrelser og enheter, navn og symboler (eller tilsvarende)

Innlevert svar leveras på norsk eller engelsk. Antall poeng for kvart delspørsmål er gjeve i utheva font. Maksimalt antall poeng for heile eksamen er 100. Eksamen består av 4 oppgåver. Vedlegg: 2 sider med tabeller og eigenskapar for transformasjonsfunksjonar.

S1 (25p) For et LTI-system med ukjende eigenskaper, eit signal $x(t) = \varepsilon(t - t_0) - \varepsilon(t - t_1)$ resulterer i eit utgangssignal $y(t)$ gjeven ved:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \varepsilon(t - t_1) (e^{-(t-t_1)/2} - 1) - \varepsilon(t - t_0) (e^{-(t-t_0)/2} - 1)$$

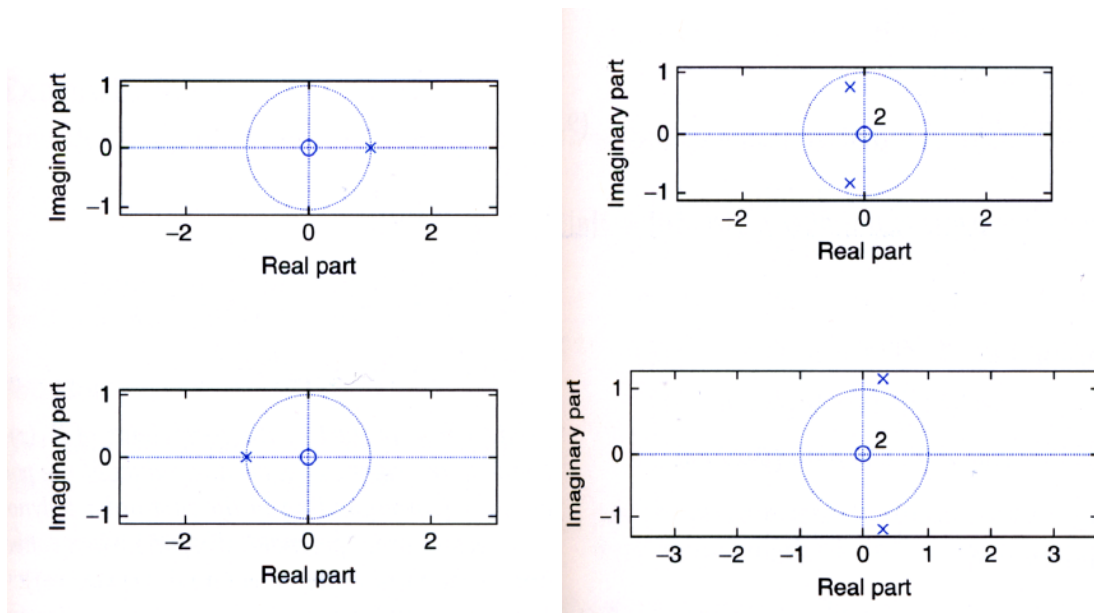
- A) (10p)** Finn impulsresponsfunksjonen $h(t)$ for dette systemet.
- B) (10p)** Finn frekvensresponsen (frequency response) $|H(j\omega)|$ for $\omega = 1, 10, 100\text{Hz}$
- C) (5p)** Forklar kva som vanlegvis kallas kvit støy (“white noise”) ? Forklar korleis eit slikt signal $n(t)$ kan brukas til å oppnå $h(t)$ for eit LTI-system med ukjende eigenskaper.

S2 (25p) Vurder følgjande differenslikning (“difference equation”) og eksitasjon $x[n]$ (inngangssignal):

$$y[n] - 0.7y[n - 1] + 0.1y[n - 2] = x[n] + x[n - 1]$$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 2 \\ 0 & n \neq 2 \end{cases}$$

- A) (10p)** Finn $y[n]$ med bruk av z-transform.
- B) (5p)** Stadfest A) ved å løyse $y[n]$ direkte ved hjelp av differenslikningen (“difference equation”), eller ved hjelp av ”long division”.



Figur 7: Q2c

C) (10p) Z-transformasjoner av 4 ulike signaler har blitt representert i z-planet under. Skisser diskrete signaler som svarer til disse transformasjonene. Forklar skilnaden mellom diskret tidsfrekvens og kontinuerlig tidsfrekvens.

S3 (25p) Ein straum av deltaimpulsar (“Train of delta impulses”) er definert ved

$$\delta_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

der T_s er tidsforseinkinga mellom påfølgjande impulsar.

A) (10p) Gjeven at Fouriertransformen $F_s(\omega)$ av samplet funksjon $f_s(t)$ er gjeven ved:

$$\begin{aligned} f_s(t) &= f(t)\delta_T(t) \\ F_s(\omega) &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \end{aligned}$$

forklar korleis man kan rekonstruere kontinuerlig tidsdomenefunksjon $f(t)$ frå $f_s(t)$. Kva for noken kriteria må vere oppfyllda av $f_s(t)$ og/eller $f(t)$ for at dette skal vere muleg?

B) (15p) Definer DTFT (Discrete Tid Fourier Transform) og DFT (Discrete Fourier Transform) av samplet signal $f_s(t)$ og berekn DTFT for

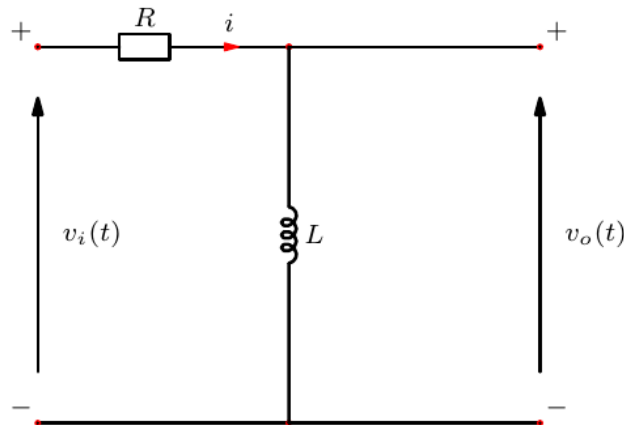
$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 < n < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Kan du bruka svaret til å skrive uttrykket for DFT av samme signal?

S4 (25p) Diagrammet under viser eit enkelt høgpasfilter.

A) (10p) Finn forholdet mellom inn $v_i(t)$ og utgang $v_o(t)$ signaler for dette filteret.

- B) **(10p)** Du ynskjer nå å designa diskret tidsdomene (DSP) filter med tilsvarende eigenskaper. Utlei differenslikningen ("difference equation") for dette systemet og tekn eit blokkdiagram for DSP filter.
- C) **(5p)** Skriv z-transform av overføringsfunksjonen. Berekn impulsrespons $h[n]$ med $0 \leq n < 3$ for DSP-filter ved hjelp av ein valfri metode.



Figur 8: Høgpasfilter; spørsmål 4

Fourier Series

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Fourier Transform

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Fourier transform av ein periodisk funksjon:

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T_0} F(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0)$$

Figur 9: nyttige formler

Appendix B.1 Bilateral Laplace Transform Pairs

$x(t)$	$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$	ROC
$\delta(t)$	1	$s \in \mathbb{C}$
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$e^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{-a\}$
$-e^{-at}\varepsilon(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} < \text{Re}\{-a\}$
$t\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$t^n\varepsilon(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$te^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{-a\}$
$t^n e^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{-a\}$
$\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{-a\}$
$e^{-at}\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{-a\}$
$t\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$t\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$

Appendix B.3 Fourier Transform Pairs

$x(t)$	$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\dot{\delta}(t)$	$j\omega$
$\frac{1}{T} \text{III}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\text{III}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$
$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\text{rect}(at)$	$\frac{1}{ a } \text{si}\left(\frac{\omega}{2a}\right)$
$\text{si}(at)$	$\frac{\pi}{ a } \text{rect}\left(\frac{\omega}{2a}\right)$
$\frac{1}{t}$	$-j\pi\text{sign}(\omega)$
$\text{sign}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$e^{-\alpha t }, \alpha > 0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
$e^{-a^2 t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$

Appendix B.2 Properties of the Bilateral Laplace Transform

$x(t)$	$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$	ROC
Linearity $Ax_1(t) + Bx_2(t)$	$AX_1(s) + BX_2(s)$	ROC $\supseteq$ $\text{ROC}\{X_1\} \cap \text{ROC}\{X_2\}$
Delay $x(t - \tau)$	$e^{-s\tau}X(s)$	not affected
Modulation $e^{at}x(t)$	$X(s - a)$	$\text{Re}\{a\}$ shifted by $\text{Re}\{a\}$ to the right
'Multiplication by t ', Differentiation in the frequency domain $tx(t)$	$-\frac{d}{ds}X(s)$	not affected
Differentiation in the time domain $\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	ROC $\supseteq$ $\text{ROC}\{X\}$
Integration $\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	ROC $\supseteq \text{ROC}\{X\}$ $\cap \{s : \text{Re}\{s\} > 0\}$
Scaling $x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{s}{a}\right)$	ROC scaled by a factor of a

Appendix B.4 Properties of the Fourier Transform

	$x(t)$	$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$
Linearity	$Ax_1(t) + Bx_2(t)$	$AX_1(j\omega) + BX_2(j\omega)$
Delay	$x(t - \tau)$	$e^{-j\omega\tau}X(j\omega)$
Modulation	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
'Multiplication by t ' Differentiation in the frequency domain	$tx(t)$	$-\frac{dX(j\omega)}{d(j\omega)}$
Differentiation in the time domain	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
Integration	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$X(j\omega) \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]$ $= \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Scaling	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{j\omega}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Convolution	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$
Multiplication	$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$
Duality	$x_1(t)$ $x_2(jt)$	$x_2(j\omega)$ $2\pi x_1(-\omega)$
Symmetry relations	$x(-t)$ $x^*(t)$ $x^*(-t)$	$X(-j\omega)$ $X^*(-j\omega)$ $X^*(j\omega)$
Parseval theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) ^2 d\omega$

Appendix B.6 Properties of the z -Transform

Property	$x[k]$	$X(z)$	ROC
Linearity	$ax_1[k] + bx_2[k]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	$\text{ROC} \supseteq \text{ROC}\{X_1\} \cap \text{ROC}\{X_2\}$
Delay	$x[k - \kappa]$	$z^{-\kappa}X(z)$	$\text{ROC}\{x\}$; separate consideration of $z = 0$ and $z \rightarrow \infty$
Modulation	$a^k x[k]$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$	$\text{ROC} = \left\{z \mid \frac{z}{a} \in \text{ROC}\{x\}\right\}$
Multiplication by k	$kx[k]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$\text{ROC}\{x\}$; separate consideration of $z = 0$
Time inversion	$x[-k]$	$X(z^{-1})$	$\text{ROC} = \{z \mid z^{-1} \in \text{ROC}\{x\}\}$
Convolution	$x_1[k] * x_2[k]$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$	$\text{ROC} \supseteq \text{ROC}\{x_1\} \cap \text{ROC}\{x_2\}$
Multiplication	$x_1[k] \cdot x_2[k]$	$\frac{1}{2\pi j} \oint X_1(\zeta) X_2\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{1}{\zeta} d\zeta$	multiply the limits of the ROC

Appendix B.5 Two-sided z -Transform Pairs

$x[k]$	$X(z) = \mathcal{Z}\{x[k]\}$	ROC
$\delta[k]$	1	$z \in \mathbf{C}$
$\varepsilon[k]$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$a^k \varepsilon[k]$	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
$-a^k \varepsilon[-k-1]$	$\frac{z}{z-a}$	$ z < a $
$k\varepsilon[k]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
$ka^k \varepsilon[k]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $
$\sin(\Omega_0 k) \varepsilon[k]$	$\frac{z \sin \Omega_0}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$\cos(\Omega_0 k) \varepsilon[k]$	$\frac{z(z - \cos \Omega_0)}{z^2 - 2z \cos \Omega_0 + 1}$	$ z > 1$