

IKKE-LINEÆR DYNAMIKK

Kont. eks. 24.8.1992

Løsningsstrisse

Oppgave 1

- a) Schamel-likningen er $16 u_t + 20(u^{3/2})_x + u_{xxx} = 0$,
og $\int_{-\infty}^{+\infty} dx$ gir

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u \, dx = \left[-\frac{20}{16} u^{3/2} - u_{xx} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \underline{\underline{0}}$$

- b) $u(x,t) = u(x-ct)$ innsett gir

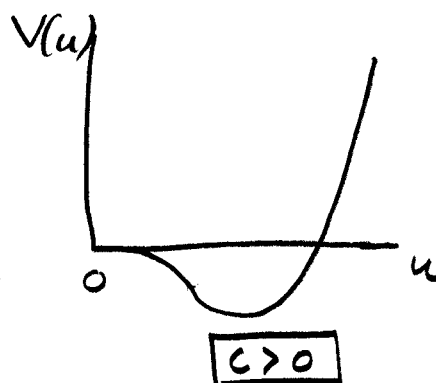
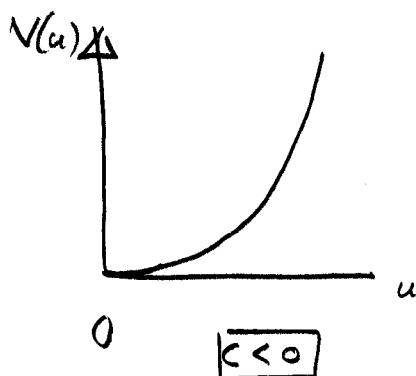
$$-16cu' + 20(u^{3/2})' + u''' = 0 \quad \text{som integreres til} \\ -16cu + 20u^{3/2} + u'' = A$$

Multiplikasjon med u' og integrasjon gir

$$-8cu^2 + 8u^{5/2} + \frac{1}{2}u'^2 = Au + E,$$

eller $\underline{\underline{\frac{1}{2}u'^2 + V(u) = E}} \quad ; \quad \underline{\underline{V(u) = 8u^{5/2} - 8cu^2 - Au}}$

- c) Formen ovenfor viser at vi har et endimensjonalt mekanisk problem med u som stedsvariabel og argumentet ξ til $u(\xi)$ som tidsvariabel. Skal vi ha $u(\xi \rightarrow \pm\infty) = 0$ må origo være et likevektspunkt $V'(u) = 0 \Rightarrow \underline{A=0}$. For store u domineres $8u^{5/2}$, for små u domineres $-8cu^2$, så potensialet ser slik ut



(2)

Så for $c > 0$ kan solitene-bølger med $u(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$ eksistere. Det tilsvares $A = E = 0$, partikkelen beveges seg fra $u=0$ til $u_{\max}$ og tilbake igjen med energi lik $E = V(0) = 0$. Da $c > 0$ er dette en høyre løpende solitene bølge.

Pulshøyden $u_{\max} > 0$ tilfredsstiller $V(u_{\max}) = 0$, som gir $u_{\max} = c^2$.

d) Den eksplisitte form finnes av $\frac{1}{2}u'^2 + V(u) = 0$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = 8c u^2 - 8u^{5/2}$$

Med $u(\xi) = c^2 y(\xi)^{-4}$ fås $u' = -4c^2 y^{-5} \cdot y'$

$$8c^4 y^{-10} y'^2 = 8c^5 y^{-8} - 8c^5 y^{-10}$$

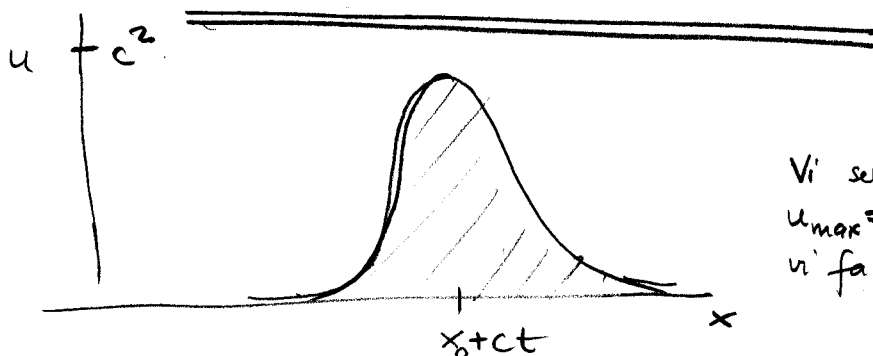
$$y'^2 = c(y^2 - 1)$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \sqrt{c} d\xi \Rightarrow \cosh^{-1} y = \sqrt{c} (\xi - \text{konstant})$$

$$= \sqrt{c} (x - x_0 - ct)$$

Innsatt

$$u(x-ct) = \frac{c^2}{\cosh^4[\sqrt{c}(x-x_0-ct)]}$$



Vi ser at $u_{\max} = c^2$, som vi fant under c).

Oppgave 2

3

- a) Med de gitte betingelser blir funksjonen B i Gel'fand-Levitan-Marchenko-likningen

$$B(z) = a^2 e^{-\lambda z}$$

og integrallikningen blir

$$K(x, y) + a^2 e^{-\lambda(x+y)} + a^2 \int_x^\infty K(x, z) e^{-\lambda(z+y)} dz = 0$$

Multiplikasjon med $e^{\lambda y}$ gir

$$e^{\lambda y} K(x, y) + a^2 e^{-\lambda x} + a^2 \int_x^\infty K(x, z) e^{-\lambda z} dz = 0$$

De to siste ledd er uavhengige av y , da er også første ledd det:

$$e^{\lambda y} K(x, y) \equiv F(x)$$

Innsatt for K :

$$0 = F(x) + a^2 e^{-\lambda x} + a^2 \int_x^\infty F(x) e^{-2\lambda z} dz = F(x) + a^2 e^{-\lambda x} + \frac{a^2 F(x)}{2\lambda} e^{-2\lambda x}$$

Løst mhp F :

$$F(x) = - \frac{a^2 e^{-\lambda x}}{1 + \frac{a^2}{2\lambda} e^{-2\lambda x}}$$

$$K(x, x) = e^{-\lambda x} F(x) = - \frac{a^2}{e^{2\lambda x} + a^2/2\lambda}$$

Potensialet:

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x) = \frac{4a^2 \lambda e^{2\lambda x}}{(e^{2\lambda x} + a^2/2\lambda)^2}$$

Med a skrive ut t -avhengigheten eksplisitt når

$$a(t) = a(0) e^{4\lambda^2 t}$$

fås

$$u(x) = -8\lambda^2 \frac{\frac{a(0)^2}{2\lambda} e^{2\lambda x + 8\lambda^2 t}}{(e^{2\lambda x} + \frac{a(0)^2}{2\lambda} e^{8\lambda^2 t})^2}$$

Kan skrives litt penere ved å sette $\frac{a(0)^2}{2\lambda} \equiv e^{2\lambda x_0}$:

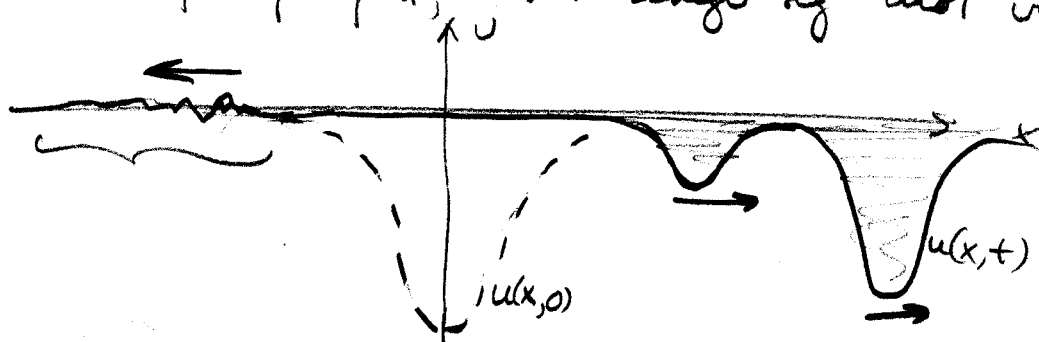
$$u(x) = -8\lambda^2 \frac{1}{\left[e^{\lambda(x-x_0-4\lambda^2 t)} + e^{-\lambda(x-x_0-4\lambda^2 t)} \right]^2}$$

$$= - \frac{2\lambda^2}{\cosh^2[\lambda(x-x_0-4\lambda^2 t)]}$$

Hastighet er
 $c = 4\lambda^2 = 4|\lambda|$

(4)

b) To bundne tilstander i det kvantemekaniske problemet (alltid med ulike egenverdier) tilsvare to solitoner. Disse beveger seg mot høyre med ulike hastigheter. I tillegg får en bakgrunnsdel (dispersive del), da potentialet ikke er refleksjonsfritt, som beveger seg mot venstre:



Mot høyre/venstre betyr vanligvis raskere/langsomme enn fasehastigheten i det lineariserte problem.

c) KdV-likningen er en god beskrivelse for overflatebølger som er svært ikke-lineære og svært dispersive:

amplitude $\ll$ vanndybde $\ll$ karakterisk bølgelengde

Oppgave 3

a) Nær origo er

$$\dot{x} = -y + \frac{1}{2}x$$

$$\dot{y} = x + \frac{1}{2}y$$

-lin. linear ordert. Der $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad A\text{'s egenverdier er gitt ved}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + 1 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2} \pm i$$

Da $\operatorname{Re} \lambda > 0$ er origo ustabilt. (frastøtende)

[Alternativt settes $x = c_1 e^{\lambda t}$, $y = c_2 e^{\lambda t}$ som gir
 $\lambda c_1 = -c_2 + \frac{1}{2}c_1$ og $\lambda c_2 = c_1 + \frac{1}{2}c_2$ som gir $\lambda = \frac{1}{2} \pm i$, og $\frac{c_1}{c_2} = \pm i$
 (bortsett fra triviallesningen $c_1 = c_2 = 0$.)]

Flere likevektpunkter (x_0, y_0) ? De må ialfall tilfredstille

$$-y + (1 - x^2 - y^2)x - \frac{1}{2}x = 0$$

$$\text{og } x - \frac{1}{2}y + (1 - x^2 - y^2)y = 0,$$

Multiplikasjon av øverste likning med y , nedre med x og subtraksjon gir $-x^2 - y^2 = 0$ $\therefore$ bare $x = y = 0$.

b) Av utgangslikningene fås

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2 + y^2) \left(\frac{1}{2} - x^2 - y^2\right).$$

$$\text{For } x^2 + y^2 > \frac{1}{2} \text{ er } \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) < 0,$$

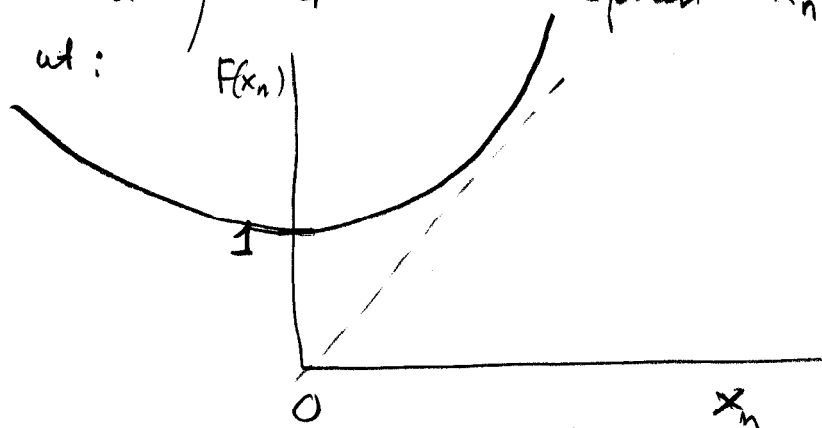
altså er sirkelen $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ en stabil

grensesyklus. Rimelig da at origo er frastøtende, som vi fant under a).

Oppgave 4

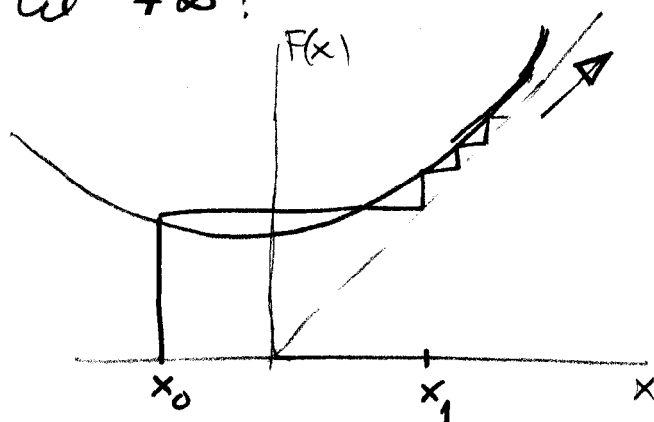
(6)

- a) For $\mu < -\frac{1}{4}$ ser iterasjonen $x_{n+1} = F(x_n)$ slik ut:



Det ser en f.eks. ved å bemerke at tangering med $F = x$ fås for μ, x_0 som tilfredstiller $F'(x_0) = 1$ og $F(x_0) = x_0$: $-2\mu x_0 = 1$ og $x_0 = 1 - \mu x_0^2$ som gir $x_0 = 2, \mu = -\frac{1}{4}$ og mindre verdier av μ "løfter" kurven.

Det er klart at enhver iterasjon vil divergere til $+\infty$:



- b) Fixpunkter: $F(x) = x \Rightarrow$

$$1 - \mu x^2 = x$$

$$x^* = \frac{-\frac{1}{2\mu} \pm \sqrt{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{4\mu^2}}}{1}$$

Her er $x_-^* = -\frac{1}{2\mu} - \sqrt{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{4\mu^2}} < -\frac{1}{2 \cdot 2} - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2}} = -1$

for $0 < \mu < 2$. Da $|x_{n+1}| < 1$ for $|x_n| < 1$ og $0 < \mu < 2$ vil banen holde seg i $(-1, 1)$, og x_-^* være irrelevant.

Det relevante fikspunktet er

$$x^* = -\frac{1}{2\mu} + \sqrt{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{4\mu^2}}$$

Dette er stabilt når $|F'(x^*)| < 1$. Da

$$F'(x^*) = -2\mu x^* = 1 - \sqrt{4\mu + 1} \quad \text{ser vi at } |F'(x^*)| < 1 \text{ for } \underline{\underline{\mu < \mu_1 = \frac{3}{4}}}$$

c) Periode to : $x_1 = 1 - \mu x_2^2$
 og $x_2 = 1 - \mu x_1^2$, med $x_1 \neq x_2$.

Subtraksjon gir

$$x_1 - x_2 = \mu(x_1^2 - x_2^2)$$

Divisjon med $x_1 - x_2 (\neq 0)$ gir

$$\underline{\underline{1 = \mu(x_1 + x_2)}} \quad \text{gied}$$

d) Stabile periode 2 når

$$\left| \left[\frac{d}{dx} F^{(2)}(x) \right]_{x=x_1} \right| < 1$$

$$|(-2\mu x_1)(-2\mu x_2)| < 1$$

$$\underline{\underline{|x_1 x_2| < 1/4\mu^2}}$$

Her er $x_1 + x_2 = 1/\mu$ og $x_2 = 1 - \mu x_1^2$ så

$$1/\mu - x_1 = 1 - \mu x_1^2$$

$$x_1^2 - \frac{1}{\mu} x_1 + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} = 0$$

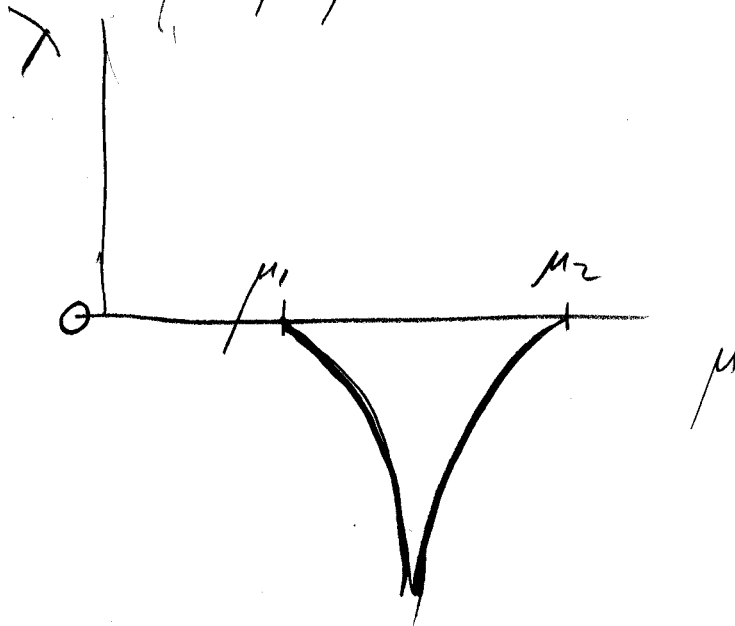
Produktet av røttene er $\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu}$ og

$$\left| \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} \right| < \frac{1}{4\mu^2} \quad \text{gir } |1 - \mu| < \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{3}{4} < \mu < \frac{5}{4}}}$$

so $\underline{\underline{\mu_2 = \frac{5}{4}}}$

⑧

e) For $\mu_1 < \mu < \mu_2$ er Liapunov-eksponenten negativ.



$$\lambda(\mu_i) = 0 \text{ for } i = 1, 2.$$

f) I en periode-doblingskaskade vil, ved økning av kontrollparameteren (μ), fås en uendelig rekke verdier $\mu_1, \mu_2, \dots$ der en stabil periodisk bane mister stabiliteten og en ny stabil bane med den dobbelte periode oppstår. Verdiene konvergerer mot en grenseverdi μ_∞ som $\mu_\infty - \mu_n \propto \delta^{-n}$ asymptotisk.