

LØSNINGSFORSLAG

EKSAMEN DIF4943

11. desember 2000

①

Oppgave 1

a) Vi bruker metoden med delvis integrasjon

$$\begin{aligned}
 \underline{y_1(x)} &= \int_x^\infty d\xi e^{-\xi^2} = - \int_x^\infty \frac{d\xi}{2\xi} \frac{d}{d\xi} e^{-\xi^2} = \\
 &= \left| -\frac{1}{2\xi} e^{-\xi^2} \right|_x^\infty - \int_x^\infty \frac{d\xi}{2\xi^2} e^{-\xi^2} = \\
 &= \frac{1}{2x} e^{-x^2} [1 + \mathcal{O}(x^{-2})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{y_2(x)} &= \int_0^x d\xi e^{\xi^2} = \int_0^1 d\xi e^{\xi^2} + \int_1^x d\xi e^{\xi^2} = \\
 &= \int_1^x \frac{d\xi}{2\xi} \frac{d}{d\xi} e^{\xi^2} + \int_0^1 d\xi e^{\xi^2} = \\
 &= \left| \frac{1}{2\xi} e^{\xi^2} \right|_1^x + \int_1^x \frac{d\xi}{2\xi^2} e^{\xi^2} + \int_0^1 d\xi e^{\xi^2} = \\
 &= \frac{1}{2x} e^{x^2} [1 + \mathcal{O}(x^{-2})]
 \end{aligned}$$

Bidragene fra nedre grense, $\xi=1$, og fra integralet $\int_0^1 d\xi e^{\xi^2}$ er subdominante.

Oppgave 1

(2)

c) $y''(x) + axy'(x) + y(x) = 0$

Ingen singulære punkter for $|x| < \infty$.
For punktet $x = \infty$ innfører vi $u = \frac{1}{x}$,

$Y(u) = y(x)$, og finner

$$u^2 \frac{d}{du} u^2 \frac{d}{du} Y(u) - \frac{a}{u} u^2 \frac{d}{du} Y(u) + Y(u) = 0.$$

Dvs.

$$Y(u)'' + \left(\frac{2}{u} - \frac{a}{u^3} \right) Y(u)' + \frac{1}{u^4} Y(u) = 0$$

Altså et rang 3 irregulært singulært punkt i $x = \infty \Leftrightarrow u = 0$

d) Metoden med dominerende balanse:
I en ligning med mange ^{ledd} antar vi at to ledd er dominerende (dvs. mye større enn de andre), og at ligningen er oppfylt ved at ~~dominerende~~ disse to leddene balanserer hverandre.

e) $y''(x) + axy'(x) + y(x) = 0$

Gjør først en eksponentiell substitusjon

$$y = e^S \Rightarrow$$

$$(S'' + S'^2 + axS' + 1) = 0$$

≡ Dominerende balanse

$$axS' \sim -1 \Rightarrow S \sim -\frac{1}{a} \log x + \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y \sim C x^{-1/a}}}$$

Oppgave 1

(3)

e forts)

Antar dominerende balanse ($S \rightarrow S_0$)

$$S_0'^2 \sim -ax S_0' \Rightarrow \underline{S_0 \sim -\frac{1}{2}ax^2 + \text{konst.}}$$

Vi må se på korreksjonen til dette resultatet for å få en ledende ordens løsning for y : $S \rightarrow S_0 + S_1 + \dots$ gir

$$\cancel{0} \quad \underbrace{(S_0'' + 1)}_{(1-a)} + \underbrace{(S_0'^2 + ax S_0')}_{{=0}} + \underbrace{2S_0' S_1' + ax S_1'}_{\substack{+ S_1'^2 \\ \text{Neglisjeres}}} = 0$$

Altså:

$$S_1'' = \frac{1-a}{a} \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{a} - 1\right) \frac{d}{dx} \log x$$

Dette gir

$$S \sim -\frac{1}{2}ax^2 + \text{konst} + \log(x^{\frac{1}{a}-1}) + \dots$$

eller

$$\underline{y(x) \sim C_1 x^{\frac{1}{a}-1} e^{-\frac{1}{2}ax^2}}$$

Oppgave 1

(4)

e forts)

De mulige asymptotiske oppførslene er derfor

$$y(x) \sim C x^{-1/a}$$

eller

$$y(x) \sim C x^{1/a-1} e^{-\frac{1}{2}ax^2}$$

Alternativt kan man bruke dominerende balanse direkte for å løse dette problemet. Med samme resultat, selvsagt, hvis man gjør det riktig.

Oppgave 2

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} dt t^{-3/2} e^{-t}$$

a) Ved delvis integrasjon

$$I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} dt \left(-2 \frac{d}{dt} t^{-1/2} \right) e^{-t}$$

$$= \left[-2 t^{-1/2} e^{-t} \right]_{\varepsilon}^{\infty} - 2 \int_{\varepsilon}^{\infty} dt t^{-1/2} e^{-t}$$

$$= 2 \varepsilon^{-1/2} e^{-\varepsilon} - 2 \int_{\varepsilon}^{\infty} dt t^{-1/2} e^{-t}$$

$$\sim \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{når } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

~~alternativt kan man bruke dominerende balanse direkte for å løse dette problemet. Med samme resultat, selvsagt, hvis man gjør det riktig.~~

Oppgave 2

(5)

b) Vi omskriver

$$\begin{aligned} -2 \int_{\varepsilon}^{\infty} dt t^{-1/2} e^{-t} &= -2 \int_0^{\infty} dt t^{-1/2} e^{-t} + 2 \int_0^{\varepsilon} dt t^{-1/2} e^{-t} \\ &= -2 \Gamma(1/2) + 2 \int_0^{\varepsilon} dt t^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \\ &= -2\sqrt{\pi} + 4\sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \end{aligned}$$

Fra a) ser vi at vi i tillegg har bidraget

~~$2\varepsilon^{-1/2} e^{-\varepsilon}$~~ $2\varepsilon^{-1/2} e^{-\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} - 2\sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$

slik at vi alt-i-alt får

$$I(\varepsilon) \sim \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} - 2\sqrt{\pi} + 2\sqrt{\varepsilon} + \dots \text{ når } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

~~~~~~~~~

Kommentar: Som en kontroll kan vi først beregne

$$I'(\varepsilon) = -\varepsilon^{-3/2} e^{-\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \varepsilon^{n-3/2}$$

ledd-for-ledd integrasjon av dette gir

$$I(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{1}{n-1/2} \varepsilon^{n-1/2} + \text{konst.}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} + 2\sqrt{\varepsilon} + \dots + \text{konst.}$$

Her må integrasjonskonstanten bestemmes på annet vis. Den er altså  $-2\sqrt{\pi}$ .

### Oppgave 3

(6)

a) Grensesjikt av tykkelse  $\sqrt{\varepsilon}$  ved  $x=0$ .

b) Grensesjikt av tykkelse  $\varepsilon$  ved  $x=-1$   
og  $x=1$ .

(Og  $y(x) \approx 0$  i intervallet  $(-1+O(\varepsilon), 1-O(\varepsilon))$ )

c) Grensesjikt av tykkelse  $\varepsilon$  ved  $x=-1$ .

Grensesjikt av tykkelse  $\sqrt{\varepsilon}$  ved  $x=0,7$

(Og  $y(x) \approx 0$  i intervallet  $(-1+O(\varepsilon), 0,7-O(\sqrt{\varepsilon}))$ )

d) Grensesjikt av tykkelse  $\sqrt{\varepsilon}$  ved  
 $x=-0,7$ .

Grensesjikt av tykkelse  $\varepsilon$  ved  
 $x=1$ .

(Og  $y(x) \approx 0$  i intervallet  $(-0,7+O(\sqrt{\varepsilon}), 1-O(\varepsilon))$ )

e) Grensesjikt av tykkelse  $\sqrt{\varepsilon}$  ved  $x=-0,86$ .  
Grensesjikt av tykkelse  $\sqrt{\varepsilon}$  ved  $x=0,86$

(Og  $y(x) \approx 0$  i intervallet  $(-0,86+\overset{\uparrow}{\sqrt{\varepsilon}}, 0,86-\overset{\uparrow}{\sqrt{\varepsilon}})$ ).  
 $O(\quad) \quad O(\quad)$

## Oppgave 4

(7)

$$\varepsilon y''(x) - \frac{1}{2-x^2} y(x) = -1, \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

a) Den ytre løsningen finnes som alltid ved å sette  $\varepsilon = 0$ :

$$\underline{y(x) = 2 - x^2}$$

b) Den ytre løsningen oppfyller ikke randbetingelsene, så vi må ha grensesjikt ved  $x = \pm 1$ . Innfører

$$X_1 = \frac{x+1}{\delta}, \quad Y_1(X_1) = y(x)$$

og 
$$X_2 = \frac{1-x}{\delta}, \quad Y_2(X_2) = y(x)$$

Innsatt fås

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} Y_1''(X_1) - Y_1(X_1) = -1$$

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2} Y_2''(X_2) - Y_2(X_2) = -1$$

Setter  $\delta^2 = \varepsilon$ . Den generelle løsningen av den indre ligningen er

$$Y_i(X_i) = 1 + C_1 e^{-X_i} + C_2 e^{X_i}$$

som matcher med den ytre løsningen når  $X_i \rightarrow \infty$ , dersom  $C_1 = -1$ ,  $C_2 = 0$ .

Altså:

$$Y_1 = \left(1 - e^{-\frac{x+1}{\sqrt{\varepsilon}}}\right), \quad Y_2 = \left(1 - e^{-\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}}\right)$$

#### Oppgave 4

8

c) Ved inspeksjon ser vi at <sup>\*</sup>

$$y_{unif}(x) = Y_1 Y_2 (2 - x^2)$$

$$= \left(1 - e^{-(x+1)/\sqrt{\varepsilon}}\right) \left(1 - e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}\right) (2 - x^2)$$

Kommentar:

Ved å skrive

$$y(x) = \frac{2 - x^2}{1 + 2\varepsilon} - f^0(x)$$

fås en homogen ligning for  $f$ :

$$\varepsilon f''(x) = \frac{1}{2 - x^2} f^0(x) = 0, \quad f'(-1) = f'(1) = \frac{1}{1 + 2\varepsilon}$$

som kan løses ved WKB-metoden (jfr. neste oppgave).

\* Det er også andre måter å skrive dette på, f.eks

$$y_{unif}(x) = (2 - x^2) - e^{-(x+1)/\sqrt{\varepsilon}} - e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}$$

# Oppgave 5

9

$$\varepsilon^2 y''(x) - \frac{1}{2-x^2} y(x) = 0$$

a) Dette er et standard WKB-problem, med

$$Q(x) = -\frac{1}{2-x^2}$$

Den generelle, ledende ordens WKB-løsning er derfor

$$\begin{aligned} y(x) &= C_A \left( \frac{1}{-Q(x)} \right)^{1/4} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x d\xi \sqrt{-Q(\xi)}} \\ &+ C_B \left( \frac{1}{-Q(x)} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x d\xi \sqrt{-Q(\xi)}} \\ &= (2-x^2)^{1/4} \left[ C_A e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{2-\xi^2}}} + C_B e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{2-\xi^2}}} \right] \\ &= (2-x^2)^{1/4} \left[ C_A e^{\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} + C_B e^{-\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} \right] \end{aligned}$$

(Det kreves ikke at man skal kunne utføre integralet

$$\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{2-\xi^2}} = \int_0^{x/\sqrt{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

# Oppgave 5

(10)

b) Fra løsningen i pkt a) finner vi, siden

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{2-\xi^2}} = \frac{\pi}{4},$$

$$y(-1) = C_A e^{-\frac{\pi}{4\xi}} + C_B e^{\frac{\pi}{4\xi}} = 1$$

$$y(1) = C_A e^{\frac{\pi}{4\xi}} + C_B e^{-\frac{\pi}{4\xi}} = 1$$

Ved symmetri ser vi at  $C_A = C_B$ , og  
derav

$$\underline{C_A = C_B = \frac{1}{e^{\pi/4\xi} + e^{-\pi/4\xi}} = \frac{1}{2 \cosh \frac{\pi}{4\xi}}}$$

Ved logaritmisk derivasjon finner vi  
så

$$\begin{aligned} \underline{C_+ \equiv y'(-1)} &= \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2}\right) C_A e^{-\frac{\pi}{4\xi}} - \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{2}\right) C_B e^{\frac{\pi}{4\xi}} \\ &= \underline{\underline{-\frac{1}{\xi} \tanh \frac{\pi}{4\xi} - \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

( $C_+ = -\frac{1}{\xi}$  godtas som svar på dette punktet)

c) Fra løsningen i pkt a) finner vi

$$y(-1) = C_A e^{-\frac{\pi}{4\xi}} + C_B e^{\frac{\pi}{4\xi}} = 1$$

$$y(1) = C_A e^{\frac{\pi}{4\xi}} + C_B e^{-\frac{\pi}{4\xi}} = -1$$

Ved symmetri ser vi at  $C_A = -C_B$ , og  
derav

$$\underline{C_A = -C_B = \frac{-1}{e^{\pi/4\xi} - e^{-\pi/4\xi}} = \frac{-1}{2 \sinh \frac{\pi}{4\xi}}}$$

Ved logaritmisk derivasjon finner vi

$$\begin{aligned} \underline{C_-} &\equiv y'(-1) = \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) C_A e^{-\frac{\pi}{4\varepsilon}} - \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\right) C_B e^{\frac{\pi}{4\varepsilon}} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \coth \frac{\pi}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

( $C_- = -\frac{1}{\varepsilon}$  gjelder som svar på dette punktet)

$$\begin{aligned} d) \quad \underline{\Delta C} &= C_+ - C_- = \frac{1}{\varepsilon} \left( \coth \frac{\pi}{4\varepsilon} - \tanh \frac{\pi}{4\varepsilon} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{\varepsilon \sinh \frac{\pi}{2\varepsilon}}}} \end{aligned}$$

$$\varepsilon = 0,1 \Rightarrow \Delta C = 0,6 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon = 0,01 \Rightarrow \Delta C = 0,24 \cdot 10^{-65}$$

$$\varepsilon = 0,001 \Rightarrow \Delta C = 0,26 \cdot 10^{-678}$$

Kommentar: Dette illustrerer hvor vanskelig det er å løse randverdi-problemer numerisk via "shooting"-metoden. En liten endring i startverdiene  $y(-1)$ ,  $y'(-1)$  gjør store endringer i sluttverdien  $y(1)$ .