

NORGES TEKNISK NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Bjørn Torger Stokke

Tlf: 73 59 34 34 eller 924 920 27

**EKSAMEN I EMNE
TFY 4310 MOLEKYLÆR BIOFYSIKK**

Mandag 10. desember 2012

Tid: kl. 0900 – 1300.

Norsk versjon: Side 1-4; English version: Pages 5-8; Likninger/Formulas: side/pages 9-12

Hjelpemidler:

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i samsvar til gjeldende regler ved NTNU

K. Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave)

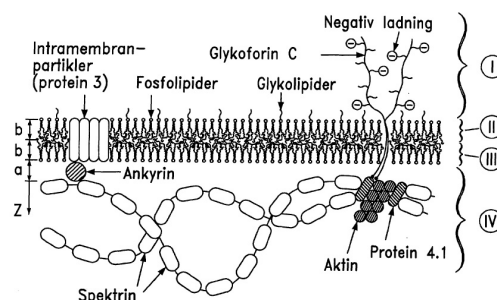
Aylward & Findlay: SI Chemical data

Øgrim & Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk

NB: I tillegg til formelsamlingene gitt over finnes utvalgte formler og data bakerst i denne oppgaveteksten.

OPPGAVE 1

- Beskriv elektronstrukturen til vannmolekylet, H_2O , inklusiv også elektronhaler. Redegjør kort for hydrogenbindinger. Det er rapportert eksperimentelle data som viser at smeltevarmen til H_2O ved fast fase - væske overgangstemperaturen utgjør kun 15% av sublimeringsvarmen av H_2O fra fast fase. Redegjør for en modell for vann som forklarer dette. Hvilke annen type eksperimentell informasjon understøtter denne modellen? Hvordan forandres parameterne i denne modellen med økende temperatur?
- Ved beskrivelse av struktur til biologiske makromolekyler benyttes begrepene primær-, sekundær-, tertiær og kvartærstruktur. Redegjør for hva disse begrepene innebærer. Beskriv sirkulær dikroisme og hvordan denne teknikken kan benyttes for å bestemme innhold av sekundærstruktur til biologiske makromolekyler.
- Beskriv hydrofobeffekten (hydrofobe bindinger).



Figur 1. Skjematisk skisse av molekylær oppbygging av cellemembranen til røde blodceller. Skissen viser tverrsnittet.

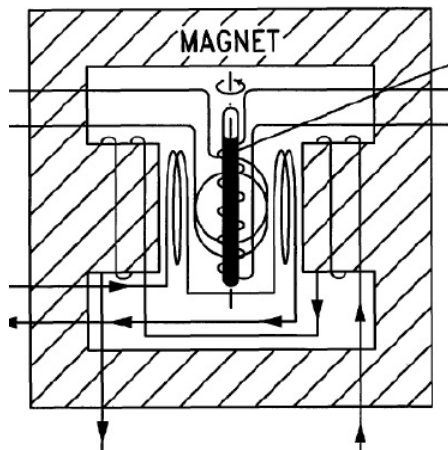
Figur 1 viser en skjematisk skisse av den molekylære oppbyggingen til cellemembranen til røde blodceller (tverrsnitt). Beskriv hvordan hydrofobeffekten (hydrofobe bindinger) bidrar til den molekylære organiseringen, både innenfor og mellom enkeltkomponentene, av denne cellemembranen.

OPPGAVE 2

a) Bloch likningene:

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= \gamma(M_y B_z - M_z B_y) - \frac{(M_x - M_{0,x})}{T_2} \\ \frac{dM_y}{dt} &= \gamma(-M_x B_z + M_z B_x) - \frac{(M_y - M_{0,y})}{T_2} \\ \frac{dM_z}{dt} &= \gamma(M_x B_y - M_y B_x) - \frac{(M_z - M_{0,z})}{T_1}\end{aligned}\quad (1)$$

(her angitt på komponentform) brukes for å beskrive egenskaper til biologiske makromolekyler under påvirkning av magnetfelt. Definer parameterne i Bloch likningene. Beskriv de underliggende fysiske mekanismene for tidskonstantene T_1 og T_2 .



Figur 2. Skjematisk skisse av tverrsnitt av eksperimentelt oppsett som benyttes ved kjernemagnetisk resonans (spektroskopi)

Figur 2 viser en skjematisk skisse av et eksperimentelt oppsett som benyttes ved kjernemagnetisk resonans (spektroskopi). Identifiser de ulike komponentene i et kartesisks koordinatsystem i forhold til denne skissen, og angi kort hvordan de ulike komponentene benyttes ifb med NMR spektroskopi.

b) Kjemisk skift og spin-spin kopling er to viktige observerbare parametre i proton NMR-spektra. Gi en kortfattet redegjørelse for de fysiske mekanismer som ligger til grunn for observasjon av disse parameterne, og hvilken informasjon de kan gi.

- c) For en kontinuerlig heliks med radius r_0 og pitch P kan det vises at

$$H(\vec{R}) = \frac{1}{P} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\chi) \exp\{in(\psi + \pi/2)\} \delta(w - n/P) \quad (2)$$

Hvor J_n er n 'te ordens Bessel funksjon, parameter $\chi = 2\pi R r_0$ og δ er Dirac delta funksjon. Spredvektoren Δk er angitt i sylinderkoordinater $\{R, \psi, w\}$ i det resiproke rom (med w -aksen parallelt til lengdeaksen til den kontinuerlige heliksen). Lag en skjematisk skisse av røntgen fiber diffraksjonsdiagrammet til en kontinuerlig heliks. Bruk χ og w som akser i denne skissen og benytt deg av følgende informasjon:

$|J_0(\chi)|$ har maksima for $\chi = 0$ og $\chi \approx 7$,
 $|J_1(\chi)|$ har maksimum for $\chi \approx 2$,
 $|J_2(\chi)|$ har maksimum for $\chi \approx 3, 5$
 $|J_n(\chi)|$ har maksimum for $\chi \approx n + 2$ for $n \geq 3$.

Hvordan endres røntgen fiberdiffraksjonsdiagrammet om man i stedet undersøker en prøve med en diskontinuerlig heliks?

OPPGAVE 3

- a) Likningen:

$$V(r) = -\frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}, \quad A > 0; B > 0 \quad (3)$$

beskriver det såkalte Lennard – Jones 6-12 potensialet. Beskriv kort parameterne i likningen. Identifiser hvilket ledd som representerer dispersjonskrefter og gjør kvalitativt rede for det fysiske opphav til denne type krefter ved å benytte elementær elektrostatikk. Beregn likevektstilstanden i Lennard-Jones potensialet uttrykt ved parameterne i likningen.

- b) Det elektrostatiske potensialet V rundt en ladning q på et makromolekyl i saltfri, vandig løsning er omvendt proporsjonal med avstanden r fra ladningen:

$$V(r) = q / (4\pi\epsilon r) \quad (4)$$

Beskriv kvalitativt effekten av tilsats av salt i vandig løsning på det elektrostatiske potensialet til en ladning. Vis at det elektrostatiske potensialet til ladede partikler i løsning kan beskrives ved likningen:

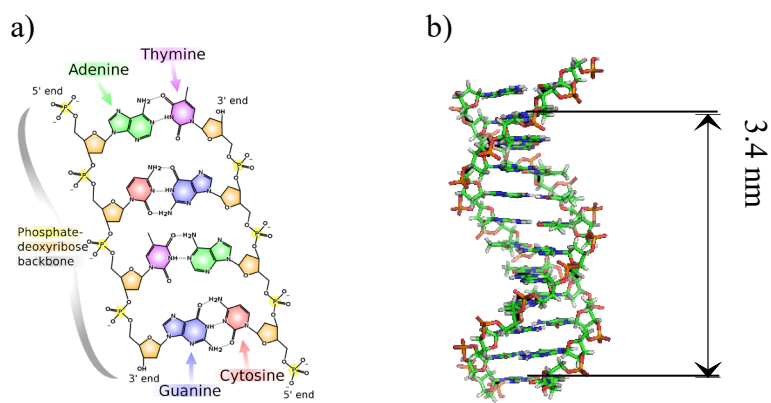
$$\epsilon \nabla^2 V(\vec{r}) = - \sum_{i=1}^N e Z_i n_{i\infty} \exp\left\{-\frac{e Z_i V(\vec{r})}{k_B T}\right\} \quad (5)$$

Definer alle størrelser som inngår i likning 5 i utledningen. Hva kalles likn 5? Vis at likning 5 kan tilnærmes ved:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda_D^2} V(\vec{r}) \quad (6)$$

når den elektrostatiske potensielle energien er mye mindre enn $k_B T$. Utled uttrykket for λ_D . Hva kalles λ_D , hva uttrykker denne parameteren og hvordan kan du påvirke verdien av denne eksperimentelt?

- c) Figur 3 viser en skjematisk skisse av strukturen til dobbel-helix DNA. Anta at vi kan modellere strukturen til dobbel-helix DNA som en stiv stav sylindermode. Hva menes med såkalt kondensasjon av motioner (i følge Mannings teori)? Beregn fraksjonen av nøytraliserte, fastsittende ladninger på det gitte DNA molekylet ved 10 og 40 °C som følge av eventuell kondensasjon av motioner. Anta monovalente motioner og at dielektrisitetskonstanten er uavhengig av temperatur i dette intervallet.



Figur 3. Illustrasjon av dobbel-heliks DNA med visning av kjemisk struktur (a) og dobbel-heliks strukturen projisert lengdeaksen (b). Den kjemiske strukturen angir nettoladning tilsvarende en elektronladning på fosfatgruppen pr base.

NORWEGIAN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF PHYSICS

Contact during the exam:
Department of Physics
Professor Bjørn Torger Stokke
Phone 73 59 34 34 (mobile: 924 920 27)

EXAM IN COURSE
TFY 4310 MOLECULAR BIOPHYSICS

Monday 10. december 2012
Time: kl. 0900 – 1300

Norsk versjon: Side 1-4; English version: Pages 5-8; Likninger/Formulas: side/pages 9-12

During the exam, the student may use:

- Simple calculator according to current NTNU rules and regulations,
- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (Norwegian or German version)
- Aylward & Findlay: SI Chemical data
- Øgrim & Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk
- Note: In addition you will find selected formulas and data at the end of this text.

EXERCISE 1

- a) Describe the electron structure of the water molecule, H_2O , including also electron tails. Describe hydrogen bonds. There is experimental evidence showing that the enthalpy of melting of H_2O at the solid – liquid transition temperature is 15% of the heat of sublimation of H_2O from the solid phase. Describe a model for water that also accounts for this experimental finding. Mention additional experimental information that supports the described model. Describe how the parameters in the model changes with increasing temperature.
- b) The concepts primary-, secondary-, tertiary-, and quaternary structure are employed when describing the structure of biological macromolecules. Describe these concepts. Describe briefly circular dichroism and how this technique can be employed to determine content of secondary structure of biological macromolecules.
- c) Describe the hydrophobic effect (hydrophobic bonds).

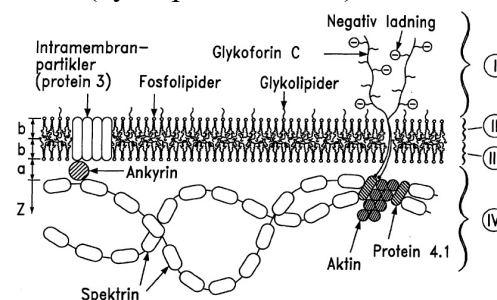


Figure1. Schematic illustration of molecular organization of the cell membrane of red blood cells (cross-section).

Figure 1 depicts a schematic illustration of the molecular organization of the cell membrane of red blood cells. Describe how the hydrophobic effect (hydrophobic bonds) contributes to the molecular organization, both within and among the various components, of this cell membrane.

EXERCISE 2

a) The Bloch equations:

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= \gamma (M_y B_z - M_z B_y) - \frac{(M_x - M_{0,x})}{T_2} \\ \frac{dM_y}{dt} &= \gamma (-M_x B_z + M_z B_x) - \frac{(M_y - M_{0,y})}{T_2} \\ \frac{dM_z}{dt} &= \gamma (M_x B_y - M_y B_x) - \frac{(M_z - M_{0,z})}{T_1}\end{aligned}\quad (1)$$

(given on component form) are used to describe properties of biological macromolecules subjected to magnetic field. Define all parameters in the Bloch equations. Describe the physically phenomena embodied in the time constants T_1 and T_2 .

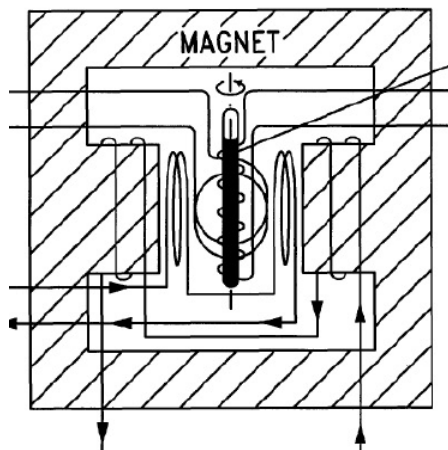


Figure 2. Schematic illustration (cross-section) of parts of an experimental setup for determination of nuclear magnetic resonance spectroscopic properties.

Figure 2 depicts a schematic illustration of parts of a NMR spectrometer. Identify the various components of a Cartesian coordinate system relative to the components in this schematic. Briefly describe how the various parts are employed in NMR spectroscopy.

b) Chemical shift and spin-spin coupling are two important observable parameters in proton NMR spectra. Give a brief description of the physical mechanisms underlying these phenomena, and what information they provide.

- c) For a continuous helix with radius r_0 and pitch P it can be shown that

$$H(\vec{R}) = \frac{1}{P} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\chi) \exp\{in(\psi + \pi/2)\} \delta(w - n/P) \quad (2)$$

where J_n are the n 'th order Bessel function, parameter $\chi = 2\pi R r_0$ and δ is the Dirac delta function. The scattering vector Δk is given in cylindrical coordinates $\{R, \psi, w\}$ in the reciprocal space and with the w -axis parallel to the helix axis. Make a schematic drawing of the X-ray fiber diffraction diagram of a continuous helix. Use χ and w as the axes and make use of the following information:

$$\begin{aligned} |J_0(\chi)| &\text{ has maximum for } \chi = 0 \text{ and } \chi \approx 7, \\ |J_1(\chi)| &\text{ has maximum for } \chi \approx 2, \\ |J_2(\chi)| &\text{ has maximum for } \chi \approx 3, 5 \\ |J_n(\chi)| &\text{ has maximum for } \chi \approx n + 2 \text{ for } n \geq 3. \end{aligned}$$

How does the X-ray fibre diffraction diagram change if the sample contains a discontinuous helix?

EXERCISE 3

- a) The equation:

$$V(r) = -\frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}, \quad A > 0; B > 0 \quad (3)$$

describes the Lennard – Jones 6-12 potential. Describe the parameters in eq. 3. Identify the terms of eq 3. that represent the dispersion forces and describe qualitatively the physical phenomena that is commonly used to account for this type of forces using an electrostatic argument. Calculate the equilibrium distance in the Lennard-Jones potential expressed in terms of the parameters of Eq. 3.

- b) The electrostatic potential V due to a point charge q on a biological macromolecule in aqueous solution without added salt is inversely proportional with the distance r from the charge:

$$V(r) = q/(4\pi\epsilon r) \quad (4)$$

Describe qualitatively the effect of adding salt to an aqueous solution on the electrostatic potential of a point charge. Show that the electrostatic potential of point charges in aqueous solution can be described by the equation:

$$\epsilon \nabla^2 V(\vec{r}) = - \sum_{i=1}^N e Z_i n_{i\infty} \exp \left\{ - \frac{e Z_i V(\vec{r})}{k_B T} \right\} \quad (5)$$

Define all parameters included in deriving equation. What is equation 5 referred to as? Show that eq. 5 can be approximated by:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda_D^2} V(\vec{r}) \quad (6)$$

assuming that the electrostatic potential energy is much less than $k_B T$. Derive the expression for λ_D . What is the parameter λ_D , referred to, what is the property that this parameter describes, and how can you select various values for this parameter experimentally.

- c) Figure 3 depicts a schematic illustration of the structure of a fragment of double-helical DNA. Assume that this structure can be approximated as rigid cylinderlike structure. Describe what the concept of counterion condensation (according to Manning's theory). Calculate the fraction of electrostatically neutralised ions of the double-helical DNA structure at 10 and 40 °C. Assume monovalent counterions and that the dielectric constant is independent of temperature in this interval.

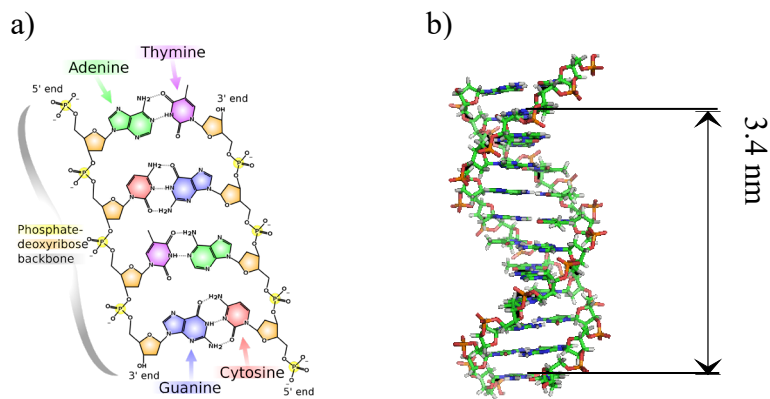


Figure 3. Illustration of fragment of a double-helical DNA depicting chemical structure (a) and the double helix projected along the helical axis (b). The chemical structure depicts a net charge corresponding to one electron charge on the phosphate group per base.

Utvalgte formler og data.

I det videre er det angitt noen utvalgte formler (samme notasjon som i kompendiet) og data. Disse kan være av nytte ifb med besvarelsen, formelene trenger ikke utledes om de legges til grunn for besvarelsen, men alle symboler må defineres.

Maxwell's likninger: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Poisson's likning: $\nabla^2 V(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) / \epsilon$

Elektromagnetisme: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E},$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$$c^2 = 1/(\mu\epsilon) \quad n = c_0/c \quad n^2 = \epsilon_r \mu_r \quad \vec{p}_{ind} = \alpha \vec{E}$$

$$\alpha(\omega, t) = \alpha_0(\omega, t) + \alpha' \cos(\omega' t)$$

Elektron ladning: $1.602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$

Vann ved 20 °C $\eta = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2 \quad \epsilon_r = 80$

Termodynamikk: $G = H - TS \quad A = U - TS \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} A \quad S = k_B \ln W$

Statistisk kjedmolekyl: $P_{eq}(\vec{r}_{e-e}) = \left(\frac{3}{2\pi(N-1)Q^2} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{3r_{e-e}^2}{2(N-1)Q^2} \right\}$

$$\langle r_{e-e}^2 \rangle = (N-1)Q^2$$

Partisjonsfunksjon $Z_0 \propto \int_0^{\lambda_D} \exp \left(-\frac{Z_i e V(r)}{k_B T} \right) 2\pi r l dr$

Friksjonskoeffisienter: $\vec{F} = -\zeta_T \cdot \vec{v} \quad \vec{T} = -\zeta_R \cdot \vec{\omega}$

$$F'_T = \zeta'_T = \zeta_T / \zeta_{0,T} \quad F'_R = \zeta'_R = \zeta_R / \zeta_{0,R}$$

Stokes formel $\zeta_{0,T} = 6\pi\eta R \quad \zeta_{0,R} = 8\pi\eta R^3$

Volum til rotasjonsellipsoide: $V = \frac{4}{3} \pi a b^2$

Fluidodynamisk volum $v_{h,i} = m_i \left(\bar{V}_i^{(S)} + \delta \cdot V_0^{(S)} \right)$

Fick's lover: $\frac{\partial c}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad \vec{J} = -D_T \vec{\nabla} c \quad \frac{\partial c}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$

Nernst-Einstein relasjoner: $\zeta_T D_T = k_B T \quad \zeta_R D_R = k_B T$

Kjernespin $\vec{m} = \gamma \vec{L} \quad (\vec{m})^2 = \gamma^2 \hbar^2 l(l+1) \quad m_z = m_l \gamma \hbar$

NMR $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{m} \times \vec{B} = -\gamma \vec{B} \times \vec{L} \quad \vec{\omega}_L = -\gamma \vec{B}$

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma (M_y B_z - M_z B_y) - \frac{(M_x - M_{0,x})}{T_2}$$

$$\frac{dM_y}{dt} = \gamma (-M_x B_z + M_z B_x) - \frac{(M_y - M_{0,y})}{T_2}$$

$$\frac{dM_z}{dt} = \gamma (M_x B_y - M_y B_x) - \frac{(M_z - M_{0,z})}{T_1}$$

$$\vec{B}_{local} = \vec{B}_0 (1 - \sigma)$$

Spredning fra molekyler:

$$I(\vec{\Delta}k, t) \propto \underbrace{\left| P^* \left(\frac{\vec{\Delta}k}{2\pi}, t \right) \right|^2}_{\text{Strukturfaktor}} \cdot \underbrace{\left| \Xi^* \left(\frac{\vec{\Delta}k}{2\pi}, t \right) \right|^2}_{\text{Formfaktor}}$$

Fouriertransform til kontinuerlig heliks:

$$H(\vec{R}) = \frac{1}{P} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\chi) \exp\{in(\psi + \pi/2)\} \delta(w - n/P)$$

$$\text{hvor } \chi = 2\pi r_0 R$$

Lysspredning $\frac{\kappa c}{R_\theta} = \frac{1}{M} \left[1 + \frac{q^2}{3} R_G^2 \right] \cdot [1 + 2B_2 c] \quad q^2 = \frac{16\pi^2}{\lambda_1^2} \sin^2(\theta/2)$

$$R_\theta = \frac{I(\theta) r^2}{I_0} \quad \kappa = \frac{4\pi^2 n_L^2 (d\tilde{n}/dc)^2}{N_A \lambda_0^4}$$

Misc. $\xi = \frac{e^2}{4\pi\epsilon k_B T b} = 0.714 \text{ nm} / b \text{ (ved 25 } ^\circ\text{C)}$

Formulas and data.

The following formulas and data may or may not be of use in answering the questions. The symbols are those employed in the lecture notes. You do not need to derive these formulas, but all parameters need to be defined, if used.

Maxwell's equations: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Poisson's equation: $\nabla^2 V(\vec{r}) = -\rho(\vec{r}) / \epsilon$

Electromagnetism: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$,

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$$c^2 = 1/(\mu\epsilon) \quad n = c_0/c \quad n^2 = \epsilon_r \mu_r \quad \vec{p}_{ind} = \alpha \vec{E}$$

$$\alpha(\omega, t) = \alpha_0(\omega, t) + \alpha' \cos(\omega' t)$$

Electron charge: $1.602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$

Water at 20 °C $\eta = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$ $\epsilon_r = 80$

Thermodynamics: $G = H - TS$ $A = U - TS$ $\vec{F} = -\vec{\nabla} A$ $S = k_B \ln W$

Statistical chain molecule: $P_{eq}(\vec{r}_{e-e}) = \left(\frac{3}{2\pi(N-1)Q^2} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{3r_{e-e}^2}{2(N-1)Q^2} \right\}$

$$\langle r_{e-e}^2 \rangle = (N-1)Q^2$$

Partition function $Z_0 \propto \int_0^{\lambda_D} \exp \left(-\frac{Z_i e V(r)}{k_B T} \right) 2\pi r l dr$

Friction coefficients: $\vec{F} = -\zeta_T \cdot \vec{v}$ $\vec{T} = -\zeta_R \cdot \vec{\omega}$

$$F'_T = \zeta'_T = \zeta_T / \zeta_{0,T} \quad F'_R = \zeta'_R = \zeta_R / \zeta_{0,R}$$

Stokes formula $\zeta_{0,T} = 6\pi\eta R$ $\zeta_{0,R} = 8\pi\eta R^3$

Volume of rotational ellipsoide: $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$

Fluiddynamic volum $v_{h,i} = m_i \left(\bar{V}_i^{(S)} + \delta \cdot V_0^{(S)} \right)$

Fick's laws: $\frac{\partial c}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$ $\vec{J} = -D_T \vec{\nabla} c$ $\frac{\partial c}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$

Nernst-Einstein relations: $\zeta_T D_T = k_B T$ $\zeta_R D_R = k_B T$

Nuclear spin $\vec{m} = \gamma \vec{L}$ $(\vec{m})^2 = \gamma^2 \hbar^2 l(l+1)$ $m_z = m_l \gamma \hbar$

NMR

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{m} \times \vec{B} = -\gamma \vec{B} \times \vec{L} \qquad \vec{\omega}_L = -\gamma \vec{B}$$

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma (M_y B_z - M_z B_y) - \frac{(M_x - M_{0,x})}{T_2}$$

$$\frac{dM_y}{dt} = \gamma (-M_x B_z + M_z B_x) - \frac{(M_y - M_{0,y})}{T_2}$$

$$\frac{dM_z}{dt} = \gamma (M_x B_y - M_y B_x) - \frac{(M_z - M_{0,z})}{T_1}$$

$$\vec{B}_{local} = \vec{B}_0 (1 - \sigma)$$

Scattering from molecules:

$$I(\vec{\Delta k}, t) \propto \underbrace{\left| P^* \left(\frac{\vec{\Delta k}}{2\pi}, t \right) \right|^2}_{\text{Structure factor}} \cdot \underbrace{\left| \Xi^* \left(\frac{\vec{\Delta k}}{2\pi}, t \right) \right|^2}_{\text{Form factor}}$$

Fourier transform of continuous helix:

$$H(\vec{R}) = \frac{1}{P} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\chi) \exp\{in(\psi + \pi/2)\} \delta(w - n/P)$$

$$\text{where } \chi = 2\pi r_0 R$$

Light scattering

$$\frac{\kappa c}{R_\theta} = \frac{1}{M} \left[1 + \frac{q^2}{3} R_G^2 \right] \cdot [1 + 2B_2 c]$$

$$q^2 = \frac{16\pi^2}{\lambda_1^2} \sin^2(\theta/2)$$

$$R_\theta = \frac{I(\theta) r^2}{I_0}$$

$$\kappa = \frac{4\pi^2 n_L^2 (d\tilde{n}/dc)^2}{N_A \lambda_0^4}$$

Misc.

$$\xi = \frac{e^2}{4\pi\epsilon k_B T b} = 0.714 \text{ nm} / b \text{ (at } 25^\circ \text{C)}$$