

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

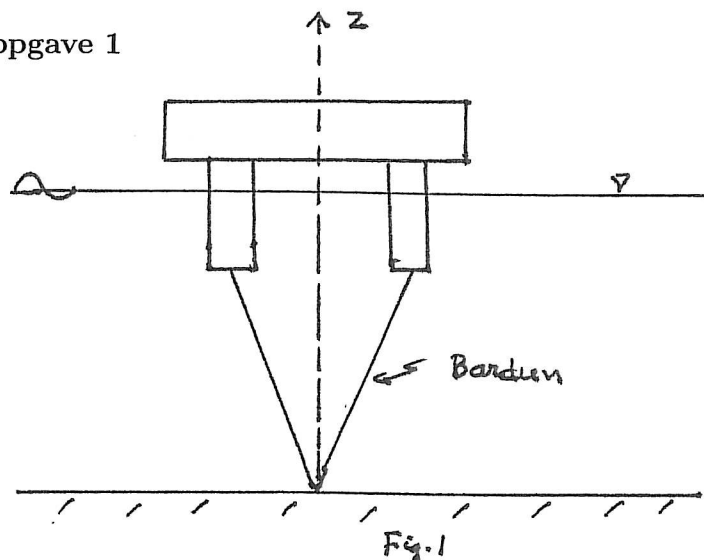
Faglig kontakt under eksamen:
Iver Brevik, tlf. 735 93555

EKSAMEN I FAG TEP4145 KLASSISK MEKANIKK

Tirsdag 2. juni 2009, kl. 0900 - 1300
Studiepoeng: 7,5
Sensuren faller i uke 26

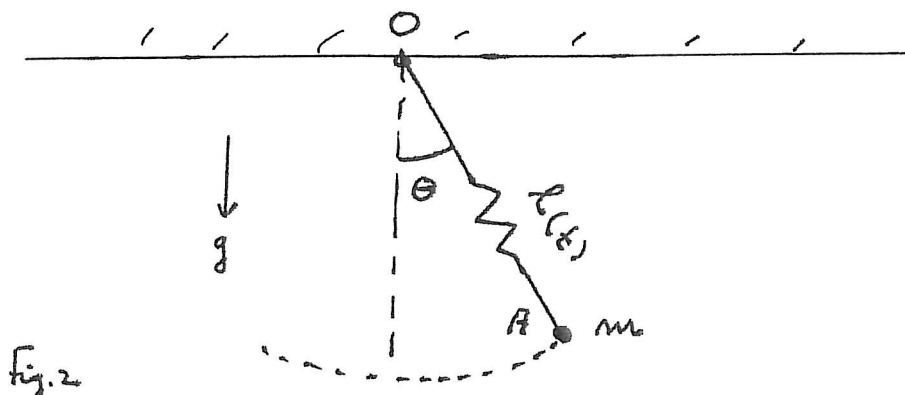
Hjelpemidler C: Typegodkjent kalkulator, i henhold til NTNU's regler.
Trykte hjelpemidler: Formelsamling i matematikk.

Oppgave 1



En flytende oljeplattform, forankret via barduner til bunnen (Fig. 1), vil i sjøgang svinge såvel vertikalt som horisontalt. Forutsatt enkle harmoniske innkommende bølger kan vi anta at plattformen har to svingemoder (frihetsgrader): 1) en vertikal mode (bevegelse i z -retning) på grunn av elastisiteten i bardunene, og 2) en horisontal mode der plattformen beveger seg fram og tilbake.

En kan tenke seg at følgende enkle mekaniske modell simulerer plattformens bevegelse (Fig. 2):



Stanga OA danner en elastisk matematisk pendel. Pendelmassen m i A representerer plattformen (se bort fra massen av selve stanga). Stanga har to svingemoder: 1) den kan vibrere longitudinalt, som en fjær med fjærkonstant k . Kalles den relative tidsavhengige endring av stanglengden for $x(t)$, vil lengden av stanga være

$$l(t) = l_0[1 + x(t)],$$

hvor l_0 er en gitt konstant. 2) For det andre vil stanga danne en pendel i tyngdefeltet.

a) Sett opp Lagrangefunksjonen $L = L(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$ for systemet, idet du velger tyngdens potensielle energi lik null for $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Vis at LAGRANGES ligninger for x og θ blir

$$\ddot{x} - (1 + x)\dot{\theta}^2 + \omega_0^2 x = \Omega_0^2 \cos \theta,$$

$$(1 + x)\ddot{\theta} + 2\dot{x}\dot{\theta} = -\Omega_0^2 \sin \theta,$$

hvor egenfrekvensene er $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ og $\Omega_0 = \sqrt{g/l_0}$.

b) Anta $x \ll 1$, $\theta \ll 1$, og skriv ligningene til første orden i x og θ . Finn herav $x = x(t)$ og $\theta = \theta(t)$, når initialbetingelsene ved $t = 0$ er $x(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{x}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$.

Oppgave 2

En partikkel med masse m og elektrisk ladning q beveger seg på et horisontalt bord i xy -planet, og er påvirket av et konstant magnetisk felt rettet langs z -aksen. Altså $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$. Det tilhørende magnetiske vektorpotensial er

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = (0, B_0 x, 0)$$

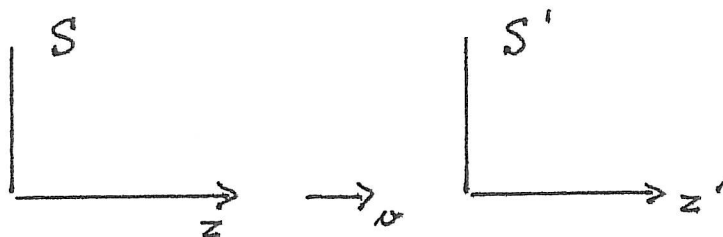
(den generelle sammenhengen mellom $\mathbf{B}$ og $\mathbf{A}$ er $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$). Skalarpotensialet ϕ er lik null. Lagrangefunksjonen oppgis å være

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}.$$

a) Gå ut fra uttrykket $H = p_i \dot{x}_i - L$ for Hamiltonfunksjonen, og vis hvordan H kan skrives som en funksjon av x_i og de kanoniske impulskomponenter p_i .

b) Finn Hamiltons ligninger i x - og y -retning. Vis hvordan kraftkomponentene $F_i = m\ddot{x}_i$ beregnet ut ifra disse ligningene er i overensstemmelse med komponentene av Lorentzkraften $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$.

Oppgave 3



Inertialsystemet S' beveger seg i forhold til inertialsystemet S med konstant hastighet v langs z -aksen. En partikkel i S' beveger seg lineært langs z' -aksen med vilkårlig hastighet $u'_z = dz'/dt'$ og vilkårlig akselerasjon $a'_z = du'_z/dt'$.

a) Gå ut fra Lorentztransformasjonen, og finn hastigheten $u_z = dz/dt$ i S uttrykt ved u'_z og v (Einsteins addisjonsformel).

b) Finn akselerasjonen $a_z = du_z/dt$ i S , uttrykt ved a'_z , u'_z og v .

Oppgave 4 (halv vekt)

Newtons 2. lov kan i et roterende koordinatsystem skrives slik:

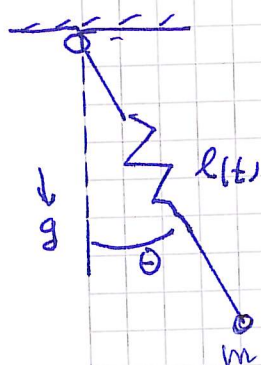
$$\mathbf{F}_{eff} = m\mathbf{a}_r,$$

hvor $\mathbf{a}_r$ er den relative akselerasjon. Vis at

$$\mathbf{F}_{eff} = \mathbf{F} + 2m(\mathbf{v}_r \times \boldsymbol{\omega}) - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}),$$

hvor $\mathbf{v}_r$ er den relative hastighet.

En partikkel slippes i stor høyde fra et punkt over ekvator. Hva er retning og omtrentlig størrelse av Coriolisakselerasjonen etter $t = 10$ sekunder? Sett $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\omega = 5,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

Løsning Oppgave 1

Elastisk vinkelfrekvens for fjæra: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Potensiell energi i fjæra: $\frac{1}{2} k l_0^2 x^2(t)$.

Potensiell energi i tyngdefeltet: $-mg l_0 [1+x(t)] \cos \theta$; den er null ved $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Her!°

$$V = \frac{1}{2} k l_0^2 x^2 - mg l_0 (1+x) \cos \theta.$$

Kinetisk energi $T = \frac{1}{2} m l_0^2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l_0^2 (1+x)^2 \dot{\theta}^2$

a)
$$L = T - V = \frac{1}{2} m l_0^2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l_0^2 (1+x)^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k l_0^2 x^2 + mg l_0 (1+x) \cos \theta.$$

Lagrange: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} - (1+x) \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 x = \Omega_0^2 \cos \theta$

Tilsvarende: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ gir, ettersom $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l_0^2 (1+x)^2 \dot{\theta}$,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l_0^2 [2(1+x) \dot{x} \dot{\theta} + (1+x)^2 \ddot{\theta}], \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg l_0 (1+x) \sin \theta, \quad \text{at}$$

$$(1+x) \ddot{\theta} + 2 \dot{x} \dot{\theta} = -\Omega_0^2 \sin \theta$$

b) Approximativt, med bare 1. ordens ledd inkludert,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \Omega_0^2, \quad \ddot{\theta} = -\Omega_0^2 \theta$$

Siden $\theta(0) = \theta_0$ for $\theta(t) = \theta_0 \cos \Omega_0 t$. Oppgjør $\dot{\theta}(0) = 0$.

Løsning for x :

$$x = \Omega_0^2 / \omega_0^2 + A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t, \quad A \text{ og } B \text{ konstanter.}$$

Da $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ for

$$x = \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t).$$

Løsning Oppgave 2

Gitt $\vec{B} = (0, 0, B_0)$, $\vec{A} = (0, B_0 x, 0)$

a) $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + q \vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + q B_0 x \cdot \dot{y}$

Lagrangefunksjonen $H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L$

Da $p_i = \partial L / \partial \dot{x}_i$ får $p_x = m \dot{x}$, $p_y = m \dot{y} + q B_0 x$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 Kanoniske impuls mekaniske impuls.

$H = m \dot{x}^2 + (m \dot{y} + q B_0 x) \dot{y} - \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - q B_0 x \dot{y}$

$H = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2$. Innsetting av $\dot{x} = \frac{1}{m} p_x$, $\dot{y} = \frac{1}{m} (p_y - q B_0 x)$ gir

$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m} (p_y - q B_0 x)^2 = H(p_x, p_y, x)$.

b) Lagrangens ligninger $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ gir $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$ og

$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m} (p_y - q B_0 x)$.

Lagrangens $\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial x_i}$ gir $\dot{p}_x = - \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{q B_0}{m} (p_y - q B_0 x)$ og

$\dot{p}_y = - \frac{\partial H}{\partial y} = 0$.

Kraft på partikkelen: $F_i = m \ddot{x}_i$.

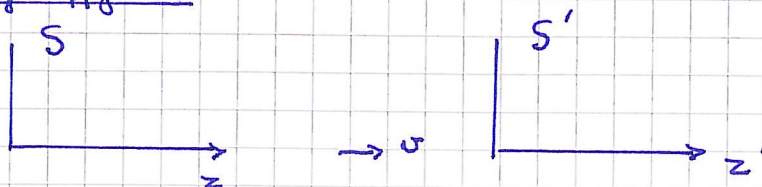
For Lagrangens ligninger: $m \ddot{x} = \dot{p}_x = \frac{q B_0}{m} (p_y - q B_0 x) = q B_0 \dot{y}$,

og $m \ddot{y} = \underbrace{(\dot{p}_y - q B_0 \dot{x})}_{=0} = - q B_0 \dot{x}$

Altså $F_x = q B_0 \dot{y}$, $F_y = - q B_0 \dot{x}$.

Dette stemmer overens med Lorentzkraften $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$, som gir

$F_x = q \dot{y} B_0$, $F_y = - q \dot{x} B_0$

Lösning Oppgave 3

- a) Fra Lorentztransformasjonene $z = \gamma(z' + vt')$, $t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}z')$ fås
 $dz = \gamma(dz' + v dt')$, $dt = \gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dz')$, som gir i systemet S

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dz'} = \frac{u_z' + v}{1 + \frac{vu_z'}{c^2}} \quad \begin{array}{l} \text{Einsteins} \\ \text{addisjonsformel} \end{array}$$

- b) Differensier formelen:

$$du_z = \frac{-\frac{v}{c^2} du_z'}{\left(1 + \frac{vu_z'}{c^2}\right)^2} \cdot (u_z' + v) + \frac{1}{1 + \frac{vu_z'}{c^2}} \cdot du_z'$$

Bruken $dt = \gamma(dt' + \frac{v}{c^2} dz')$:

$$a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{-\frac{v}{c^2} du_z' (u_z' + v)}{\left(1 + \frac{vu_z'}{c^2}\right)^2 \gamma(dt' + \frac{v}{c^2} dz')} + \frac{du_z'}{\left(1 + \frac{vu_z'}{c^2}\right) \gamma(dt' + \frac{v}{c^2} dz')}$$

$$= \frac{-\frac{v}{c^2} a_z' (u_z' + v)}{\gamma \left(1 + \frac{vu_z'}{c^2}\right)^3} + \frac{a_z'}{\gamma \left(1 + \frac{vu_z'}{c^2}\right)^2}$$

$$a_z = \frac{a_z'}{\gamma \left(1 + \frac{vu_z'}{c^2}\right)^2} \left[1 - \frac{v}{c^2} \frac{u_z' + v}{1 + \frac{vu_z'}{c^2}} \right] = \frac{a_z'}{\gamma^3 \left(1 + \frac{vu_z'}{c^2}\right)^3}$$

Spesielt, hvis $u_z' = 0$:

$$\underline{a_z = (1 - \beta^2)^{3/2} \cdot a_z'}$$

Løsning Oppgave 4

Anvender operatorlikning $\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \vec{\omega} \times$
 på den absolute hastighet $\vec{v}_s = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$:

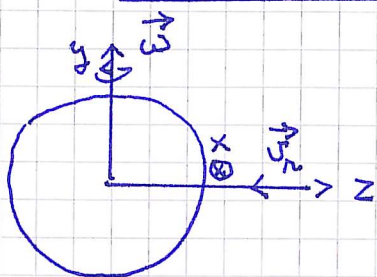
$$\vec{a}_s = \left(\frac{d\vec{v}_s}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{v}_s}{dt}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_s = \underbrace{\left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_r}_{=\vec{a}_r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Inertialsystem : $\vec{F} = m\vec{a}_s$. Dermed blir

$$\vec{F} = m\vec{a}_r + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Sette inn formen $\vec{F}_{\text{eff}} = m\vec{a}_r$, med

$$\vec{F}_{\text{eff}} = \vec{F} + 2m(\vec{v}_r \times \vec{\omega}) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$



Corioliskraften $2m(\vec{v}_r \times \vec{\omega})$ virker mot øst.

Coriolisakselerasjon i x-retning:

$$a_c = 2(\vec{v}_r \times \vec{\omega})_x = -2\dot{z}\omega$$

Den vertikale bevegelsen dominerer, slik at

$$\dot{z} = -gt = -10 \cdot 10 = -100 \text{ m/s}, \Rightarrow$$

$$\underline{a_c} = 2 \cdot 100 \cdot 5,3 \cdot 10^{-5} \approx \underline{10^{-2} \text{ m/s}^2}$$