

NORGES TEKNISK-  
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET  
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Kontakt under eksamen:

Jon Andreas Støvneng

Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN TEP4145 KLASSISK MEKANIKK

Mandag 21. mai 2007 kl. 0900 - 1300

Norsk utgave

Hjelpemiddel: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- Typegodkjend kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidd av NTNU. (HP30S eller liknende.)

Vedlegg A: Oppgavene (Side 2 - 6).

Vedlegg B: Formler (Side 7).

Prøva består av 5 oppgaver. Det er angitt hvor mye de ulike oppgavene i utgangspunktet vil telle under vurderinga. Gjør oppgavene 1, 2 og 3, samt enten oppgave 4 (fysikk) eller oppgave 5 (teknisk kybernetikk).

**Merk** at Einsteins summekonvensjon, dvs summasjon over gjentatte indekser, benyttes, med mindre noe annet er spesifisert.

Sensuren kommer når den er klar, seinest 12. juni.

## Vedlegg A: Oppgavene

**OPPGAVE 1** [Teller 25%]

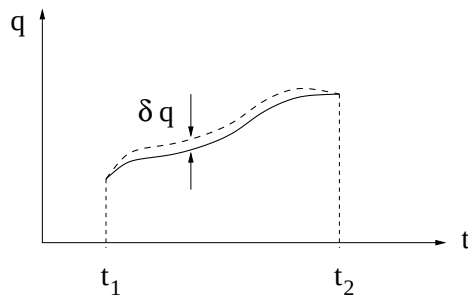
a) Utled Lagranges ligning,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

fra Hamiltons prinsipp

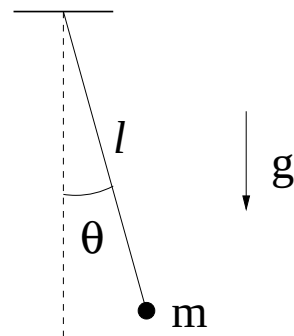
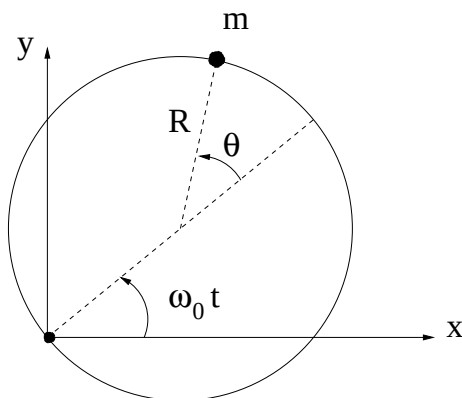
$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0.$$

for et system med en frihetsgrad. Her er det ingen variasjon i endepunktene, og virtuelle variasjoner i koordinaten  $q$  gjøres ved fast tid  $t$ , dvs  $\delta t = 0$ .



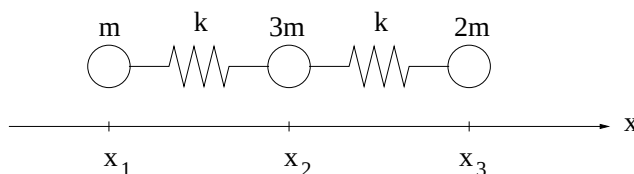
b) En punktformet masse  $m$  glir uten friksjon på en ring som roterer mot klokka i  $xy$ -planet med konstant vinkelhastighet  $\omega_0$ . Ringen, som har radius  $R$ , roterer omkring et punkt på ringen. Dette punktet ligger fast i origo  $x = y = 0$ , som vist i figuren nedenfor (til venstre).

- Finn lagrangefunksjonen  $L(\theta, \dot{\theta})$  til massen  $m$ .
- Finn Lagranges ligning, dvs bevegelsesligningen for massen  $m$ .
- Bevegelsesligningen ville bli den samme dersom massen  $m$  svingte fram og tilbake i enden av ei masseløs stang i tyngdefeltet (se figuren nedenfor, til høyre; tyngdens akselerasjon =  $g$ ). Vis dette og bestem stangas lengde  $l$ .



**OPPGAVE 2** [Teller 25%]

Tre kuler med masse henholdsvis  $m$  (kule nr 1, til venstre),  $3m$  (kule nr 2, i midten) og  $2m$  (kule nr 3, til høyre) er koblet sammen med to identiske (og ideelle) fjærer med fjærkonstant  $k$ , som vist i figuren:



Fjærene kan kun strekkes, ikke bøyes. Vi antar at kulene bare kan bevege seg langs  $x$ -aksen, og vi skal her betrakte oscillasjoner omkring kulenes likevektsposisjoner, som er henholdsvis  $x_{10}$ ,  $x_{20}$  og  $x_{30}$ .

- Bruk kulenes utsving fra likevekt,  $\eta_i = x_i - x_{i0}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), som koordinater og bestem (de symmetriske) matrisene  $\mathbf{V}$  og  $\mathbf{T}$  i de kvadratiske uttrykkene

$$V = \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j,$$

$$T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j,$$

for systemets potensielle og kinetiske energi. Her er  $V_{ij}$  og  $T_{ij}$  matriseelementer av henholdsvis  $\mathbf{V}$  og  $\mathbf{T}$ .

- Løs den sekulære ligningen

$$|\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}| = 0,$$

og bestem derved systemets to egenfrekvenser  $f_\alpha = \omega_\alpha/2\pi$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Finn tallverdier for  $f_\alpha$  når  $m = 100$  g og  $k = 10^3$  N/m. (Se bort fra moden med  $\omega = 0$ , som tilsvarer ren translasjon av systemet.)

**OPPGAVE 3** [Teller 25%.]

I denne oppgaven skal vi studere en kanonisk transformasjon  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  av en enkel endimensjonal harmonisk oscillator ( $i = \sqrt{-1}$ ):

$$\begin{aligned} Q(q, p) &= \frac{1}{\sqrt{2i}}(q + ip), \\ P(q, p) &= \frac{-1}{\sqrt{2i}}(q - ip). \end{aligned}$$

Vi setter for lettvinhets skyld  $m = k = 1$  ( $m$  = massen og  $k$  = fjærkonstanten til oscillatoren).

- Hva er oscillatorens hamiltonfunksjon  $H(q, p) = T + V$ ?
- Vis at den gitte transformasjonen  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  er kanonisk. Tips: Benytt deg av at poissonklammer er invariante under en kanonisk transformasjon, for eksempel  $[q, p] = [Q, P]$ .
- Bestem hamiltonfunksjonen  $K(Q, P)$  i de nye koordinatene  $Q, P$ . (Her er  $K = H$ .)
- Finn Hamiltons ligninger for  $Q$  og  $P$  og løs disse med startbetingelsene  $q(t=0) = p(t=0) = 1$ .
- Hva er oscillatorens totale energi?

**OPPGAVE 4** [For fysikkstudentene, teller 25%.]

a) Den elektromagnetiske felttensoren  $F_{\mu\nu}$  er definert ved

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}.$$

Bestem elementene i matrisen  $\mathbf{F}$  (dvs: uttrykt ved feltene  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{B}$ ).

b) Vis at  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  er invariant under en lorentztransformasjon.

c) En punktladning  $q$  passerer origo ved tidspunktet  $t = 0$  og beveger seg med konstant hastighet  $v$  i positiv  $x$ -retning. La oss kalle inertialsystemet hvor punktladningen er i ro for  $S_0$  og inertialsystemet hvor punktladningen beveger seg med hastighet  $v\hat{x}$  for  $S$  ( $\hat{x}$  er enhetsvektor). Det oppgis at det elektriske feltet i avstand  $\mathbf{r}$  fra punktladningen er

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

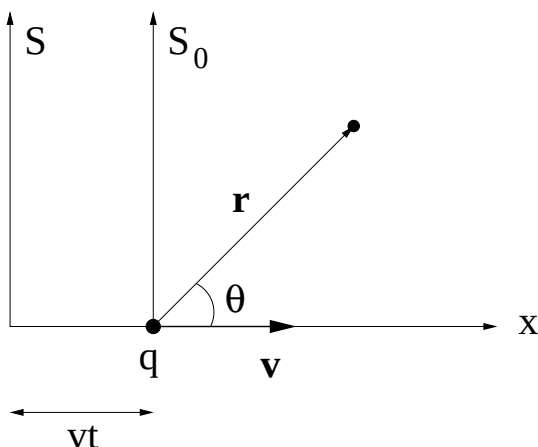
målt i  $S$ . Her angir  $\theta$  vinkelen mellom  $x$ -aksen og  $\mathbf{r}$ , se figuren nedenfor, og  $\beta = v/c$ . Hva er magnetfeltet  $\mathbf{B}_0$  målt i  $S_0$ ? Vis at magnetfeltet, målt i  $S$ , kan skrives på formen

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}.$$

d) Hva blir magnetfeltet  $\mathbf{B}$  i den ikke-relativistiske grensen  $v \ll c$ ? Sammenlign resultatet med Biot-Savarts lov,

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Skisser feltlinjer for  $\mathbf{B}$  i  $yz$ -planet.



**OPPGAVE 5** [For kybernetikkstudentene, teller 25%.]

a) La oss ta utgangspunkt i hvordan antall individer i en dyrekoloni utvikler seg med tiden. Anta - enklest mulig - at bestanden vokser med en fast faktor hvert år, dvs. at det eksisterer en  $\mu > 1$  slik at

$$b_{n+1} = \mu b_n,$$

der  $b_n$  er bestanden i år  $n$  og  $b_{n+1}$  er bestanden i år  $n + 1$ . Hva slags ligning er dette, og hva er den generelle løsningen? Skriv ned en kort forklaring på hvorfor denne modellen er urealistisk.

b) En forbedret modell oppnås ved å la  $B$  være øvre estimat på antall dyr kolonien kan romme. Definer modellen ved at

$$b_{n+1} = \mu b_n \left(1 - \frac{b_n}{B}\right).$$

Vi innfører relativ bestand

$$x_n = \frac{b_n}{B},$$

og har da

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n).$$

Videre definerer vi

$$F_\mu(x) = \mu x (1 - x),$$

som gir at

$$x_{n+1} = F_\mu(x_n).$$

Lag en enkel skisse av  $F_\mu(x)$ , og skriv ned koordinatene til topp-punktet. La  $x_0$  være skjæringspunktet mellom grafen til  $y = F_\mu(x)$  og grafen til  $y = x$ . Hva er da  $x_n$  som funksjon av  $x_0$ ? Hva slags punkt er  $x_0$ ?

c) Definer begrepet fikspunkt for en funksjon  $f$ . Definer begrepet periodisk punkt for en funksjon  $f$ , og gjør rede for begrepet grunnperiode for punktet. Forklar/definer tiltrekkende fikspunkt og frastøtende fikspunkt for en funksjon  $f$ .

d) Betrakt nå avslutningsvis

$$F_\mu(x) = \mu x (1 - x).$$

Bestem de to fikspunktene til  $F_\mu$ . La øvre skranke for  $\mu$  være 3, og avgjør om fikspunktene er tiltrekkende eller frastøtende.

## Vedlegg B: Formler

Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Hamiltons ligninger:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

- Lagranges ligninger:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

- Poissonklammer:

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad , \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}$$

- Firervektor:

$$x_\mu = (\mathbf{r}, ict)$$

- Firerpotensial:

$$A_\mu = (\mathbf{A}, i\phi/c)$$

- Elektromagnetisk felt:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- Lorentztransformasjon (med relativ hastighet  $\mathbf{v} = v\hat{x}$ ):

$$L_{22} = L_{33} = 1 \quad , \quad L_{11} = L_{44} = \gamma \quad , \quad L_{14} = -L_{41} = i\beta\gamma$$

$$\beta = v/c \quad , \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

- Lorentztransformasjon av elektromagnetisk felt (der inertialsystemet  $S_0$  beveger seg med hastighet  $v\hat{x}$  relativt til  $S$ ):

$$E_x = E_{0x} \quad , \quad E_y = \gamma(E_{0y} + vB_{0z}) \quad , \quad E_z = \gamma(E_{0z} - vB_{0y})$$

$$B_x = B_{0x} \quad , \quad B_y = \gamma(B_{0y} - \frac{v}{c^2}E_{0z}) \quad , \quad B_z = \gamma(B_{0z} + \frac{v}{c^2}E_{0y})$$

- Trigonometriske relasjoner:

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$