NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPLIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Øyvind Borck
Telefon: 73551091

Eksamen TFY4345: Klassisk mekanikk

Onsdag 2. juni 2010
kl. 09.00–13.00
Bokmål

Oppgavesettet består av tre oppgaver på tre sider. På side fire finner du noen oppgitte formler. Einsteins summekonvensjon benyttes.

Tillatte hjelpemidler: C.
Godkjent, enkel kalkulator
K. Rottmann: Matematisk formelsamling
K. Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae
Se også oppgitte formler på side 4 i oppgavesettet.

Alle delspørsmål teller likt. Les oppgavene nøye. Lykke til!

Oppgave 1

En kule med masse m er tredd på en vaier formet som en sirkel med radius R.

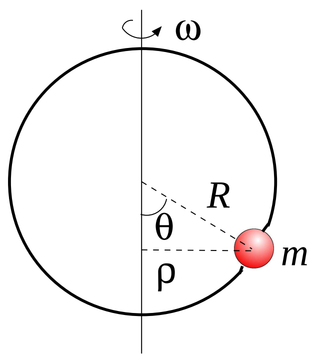

Figure 1:

Kula kan gli friksjonsløst på vaieren. Vaieren ligger i vertikalplanet og roterer om vertikaldiameteren med konstant vinkelhasighet ω, se figur 1.

a) Vis at lagrangefunksjonen til dette systemet kan skrives som:

$$L = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta \right) - mgR \left(1 - \cos \theta \right)$$

med et passende valg av nullpunkt for den potensielle energien.

b) Vis at bevegelsesligningen til vinkelen θ er:

$$\ddot{\theta} = \left(w^2 \cos \theta - g/R \right) \sin \theta$$

Vi skal nå bruke bevegelsesligningen til å finne likevektspunkter for kula. Et likevektspunkt for dette systemet er en vinkel θ (kall den θ_0) som er slik at dersom vi plasserer kula i ro ($\dot{\theta} = 0$) i $\theta = \theta_0$ så vil kula forbli i ro i θ_0. Det er ikke vanskelig å innse at dersom $\ddot{\theta} = 0$ for $\theta = \theta_0$, så er θ_0 garantert å være et likevektspunkt.

c) Finn likevektspunktene til systemet. Hint: Avhengig av størrelsen på ω er det enten to eller fire likevektspunkter.

Oppgave 2

To pendler med masse m og lengde l er koblet sammen med en fjær med fjærkon-

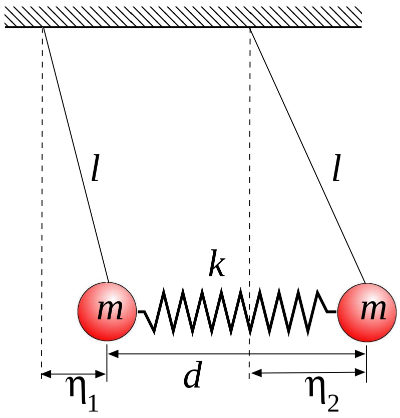

Figure 2: To enkle pendler koblet sammen med en fjær.

stant k, se figur 2. Pendlene svinger i samme plan. Ved likevekt henger pendlene vertikalt og fjæra da har sin naturlige lengde d_0, det vil si den er verken utstrekt eller sammenpresset.

a) Anta små pendelutslag, og vis at Lagrangefunksjonen til systemet er:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2\right) - \frac{mg}{2l}\left(\eta_1^2 + \eta_2^2\right) - \frac{1}{2}k\left(\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_1\eta_2\right)$$

b) Finn bevegelsesligningene for de to koordinatene η_1 og η_2.

c) Gjett at løsningene til bevegelsesligningene har formen

$$\eta_i = Ca_i \exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right) \qquad i = 1, 2$$

og finn egenfrekvensene til systemet.

d) Finn og beskriv normalmodene til systemet.

Oppgave 3

Når man studerer prosesser av typen $A+B \to C+D$, som for eksempel prosessen $e^- + e^+ \to \gamma + \gamma$, så har vist seg praktisk å innføre de såkalte Mandelstamvariablene s, t og u definert ved:

$$s \equiv -(p_A + p_B)^2/c^2$$

$$t \equiv -(p_A - p_C)^2/c^2$$

$$u \equiv -(p_A - p_D)^2/c^2$$

Her er $p_X = (\mathbf{p}, \mathrm{i}E/c)$ (her er $X = A, B, C$ eller D) firerimpulsen til partikkel X. Foretrekker du å bruke reell metrikk med fortegnskonvensjon $\mathrm{Tr}\,\mathbf{g} = -2$, må du bytte fortegn i definisjonene: $s \to -s$, $t \to -t$ og $u \to -u$. Fordelen med Mandelstamvariablene er at de er Lorentz-invariante størrelser, og altså har samme verdi i alle inertialsystem.

a) Vis dette ekplisitt for parameteren s.

b) Vis at:

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2$$

c) Anta at partikkel B er i ro (i labsystemet). Vis at energien til partikkel A i labsystemet kan uttrykkes som:

$$E_A^{\mathrm{lab}} = \frac{(s - m_A^2 - m_B^2)c^2}{2m_B}$$

Oppgitte formler

Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p}) \quad p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu \qquad \text{eventuelt} \qquad p_\mu = (\mathbf{p}, \mathrm{i}E/c)$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$p'_\mu = L_\mu^\nu p_\nu \qquad \text{eventuelt} \qquad p'_\mu = L_{\mu\nu} p_\nu$$

$$L_\beta^\mu L_\mu^\alpha = \delta_\beta^\alpha \qquad \text{eventuelt} \qquad L_{\alpha\mu} L_{\beta\mu} = \delta_{\alpha\beta}$$