ENGLISH

PROBLEM 1 (20%)

Problems **(a)** – **(f)** below are multiple-choice questions. Select one or more of the alternatives i)-iv) as the correct alternative/alternatives.

(a) Constraints that can be expressed as equations of coordinates and time as follows $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, t) = 0$ are:

i) Cruciform.
ii) Holonomic.
iii) Non-holonomic.
iv) Scleronomous.

(b) The Lagrange equations may be written in the form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \tag{1}$$

i) When all the frictional forces are included in the Lagrangian.
ii) Never.
iii) When L contains the potential from conservative forces while Q_j represents forces that cannot be derived from such potentials.
iv) Only when the $L = T - V$ and Q_j is the generalized force stemming from all conservative potentials.

(c) Hamilton's principle is an example of a:

i) Hamiltonian.
ii) Variational principle.
iii) Lagrange multiplier.
iv) Generalized force.

(d) Let $p_j = \partial L/\partial \dot{q}_j$ be the canonical momentum. If a Lagrangian is cyclic in q_j, then:

i) p_j is not conserved.
ii) q_j appears in the Lagrangian.
iii) $\dot{q}_j$ does not appear in the Lagrangian.
iv) p_j is conserved.

(e) Canonical transformations may often be conveniently found or verified by using a:

i) Lagrangian multiplier.
ii) Gap transformer.
iii) Generating function.
iv) Lorentz-boost.

(f) The differential scattering cross section *does not* depend on the following property of incoming particles:

i) Velocity.
ii) Mass.
iii) Charge.
iv) It depends in general on all the aforementioned quantities.

(g) Consider the following Hamiltonian where α and b are constants:

$$H = \frac{p^2}{2\alpha} - bpq\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{b\alpha}{2}q^2\mathrm{e}^{-\alpha t}(\alpha + b\mathrm{e}^{-\alpha t}) + kq^2/2. \tag{2}$$

Find the corresponding Lagrangian $L = L(q, \dot{q}, t)$ and also find an equivalent Lagrangian L' that is explicitly time-independent. Based on your findings, can you say something about what kind of physics the above Hamiltonian H describes?

PROBLEM 2 (80%)

(a) Considering scattering produced by a repulsive central force $F = kr^{-3}$ and introduce the variable $u = 1/r$. Find the general form of the solution $u = u(\theta)$ where θ is the angle characterizing the trajectory of the scattered particles. You do not have to compute the value of unknown integration constants. *Hint:* $\int dx/\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = (1/\sqrt{-\gamma})\arccos[-(\beta+2\gamma x)/\sqrt{q}]$ where $q = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

(b) Say that you have a bound Kepler system consisting of a planet orbiting a gravitational center. At time $t = t_0$ you instantaneously remove all of the planet's kinetic energy. If the orbit before t_0 was a circle, find an expression for the time t_c it takes from t_0 for the planet to collide with the center of force. The expression should only depend on the orbital period τ of the planet before t_0.

Hint 1: You may (or may not) find Kepler's 2nd law useful, namely that $dA/dt = l/(2m) =$ constant, where dA is the area swept over by the planet in a time interval dt while l is the planet's angular momentum and m is its mass.

Hint 2: An equation $\ddot{r} = -c/r^2$ can be rewritten as $\frac{d}{dt}(\dot{r}^2) = \frac{d}{dt}(2c/r)$ by multiplying it with $2\dot{r}$.

(c) Describe accurately what is meant by *threshold energy* in the context of relativistic particle collisions. Discuss how one should design experiments in order to obtain the lowest possible threshold energy for a reaction where two particles collide to produce a number of new particles.

(d) Consider a π^+ meson colliding with a neutron, the latter being stationary in the laboratory system. This reaction produces a K^+ meson and a Λ hyperon. What is the threshold energy for this reaction in the laboratory system? Denote the masses of the particles by $m_\pi, m_n, m_K, m_\Lambda$.

(e) Consider a pendulum consisting of a massless rod of fixed length with a point mass attached to its end that is allowed to move in three dimensions. How many degrees of freedom does this system have? Derive the equations of motion for the generalized coordinates describing this system.

(f) Two particles with rest masses m_1 and m_2 are observed to move along the observer's z-axis toward each other with speeds v_1 and v_2, respectively. Upon collision they are observed to coalesce into one particle of rest mass m_3 moving with speed v_3 relative to the observer. Find m_3 and v_3 in terms of m_1, m_2, v_1, v_2. Would it be possible for the resultant particle to be a photon if neither m_1 nor m_2 are zero?

(g) Give a detailed account of the relation between symmetries and conservation laws using the language and framework of the Lagrangian-formalism, providing also concrete examples.

BOKMÅL

OPPGAVE 1 (20%)

Delspørsmålene **(a)** – **(f)** nedenfor er flervalgsoppgaver. Velg et eller flere av alternativene i)-iv) som det korrekte svaret/svarene.

(a) Føringer som kan uttrykkes som likninger avhengig av rom og tid på måten $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, t) = 0$ er:

i) Krusiforme.
ii) Holonomiske.
iii) Ikke-holonomiske.
iv) Skleronome.

(b) Lagrange-likningene kan skrives på formen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \tag{3}$$

i) Når alle friksjonskrefter er inkludert i Lagrangefunksjonen.
ii) Aldri.
iii) Når L inneholder potensialet fra konservative krefter mens Q_j representerer krefter som ikke kan utledes fra slike potensialer.
iv) Kun når $L = T - V$ samt at Q_j er den generaliserte kraften som kommer fra konservative potensialer.

(c) Hamiltons prinsipp er et eksempel på:

i) En Hamiltonfunksjon.
ii) Et variasjonsprinsipp.
iii) En Lagrange multiplikator.
iv) En generalisert kraft.

(d) La $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$ være en kanonisk impuls. Dersom Lagrangefunksjonen er syklisk i q_j, så er følgende sant:

i) p_j er ikke bevart.
ii) q_j opptrer i Lagrangefunksjonen.
iii) $\dot{q}_j$ opptrer ikke i Lagrangefunksjonen.
iv) p_j er bevart.

(e) Kanoniske transformasjoner kan ofte identifiseres på en praktisk måte ved å bruke en:

i) Lagrange multiplikator.
ii) Gap transformasjon.
iii) Genererende funksjon.
iv) Lorentz-boost.

(f) Det differensielle spredningstverrsnittet avhenger *ikke* av følgende egenskap hos de innkommende partiklene:

i) Hastighet.
ii) Masse.
iii) Ladning.
iv) Generelt sett avhenger spredningstverrsnittet av samtlige ovennevnte størrelser.

(g) Betrakt følgende Hamiltonfunksjon hvor α og b er konstanter:

$$H = \frac{p^2}{2\alpha} - bpq\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{b\alpha}{2}q^2\mathrm{e}^{-\alpha t}(\alpha + b\mathrm{e}^{-\alpha t}) + kq^2/2. \tag{4}$$

Utled den tilsvarende Lagrangefunksjonen $L = L(q, \dot{q}, t)$ og finn dessuten en ekvivalent Lagrangefunksjon L' som ikke har noen eksplisitt tidsavhengighet. På grunnlag av det du finner: kan du si noe om hva slags fysikk H ovenfor beskriver?

OPPGAVE 2 (80%)

(a) Betrakt spredning forårsaket av en repulsiv sentral kraft $F = kr^{-3}$ og introduser variabelen $u = 1/r$. Utled den generelle formen for løsningen $u = u(\theta)$ hvor θ er vinkelen som beskriver banen til de spredte partiklene. Du trenger ikke å beregne verdien til ubestemte integrasjonskonstanter. *Hint:* $\int dx/\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2} = (1/\sqrt{-\gamma})\arccos[-(\beta + 2\gamma x)/\sqrt{q}]$ hvor $q = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

(b) Betrakt et bundet Kepler system bestående av en planet i bane rundt et gravitasjonssenter. Ved tiden $t = t_0$ fjerner vi instantant all kinetisk energi til planeten. Dersom banen før t_0 var en sirkel, finn et uttrykk for tiden t_c som det tar målt fra t_0 før planeten kolliderer med gravitasjonssenteret. Uttrykket skal kun være avhengig av baneperioden τ som planeten hadde før t_0.

Hint 1: Keplers andre lov kan (eller kan ikke) være nyttig å bruke her: $dA/dt = l/(2m) =$ konstant, hvor dA er arealet som planeten sveiper over i et tidsintervall dt mens l er planetens dreieimpuls og m er dens masse.

Hint 2: En likning $\ddot{r} = -c/r^2$ kan skrives om til $\frac{d}{dt}(\dot{r}^2) = \frac{d}{dt}(2c/r)$ ved å multiplisere den med $2\dot{r}$.

(c) Beskriv nøyaktig hva som menes med *terskelenergi* i sammenheng med relativistiske partikkelkollisjoner. Drøft hvordan man bør designe eksperimenter for å oppnå lavest mulig terskelenergi for en reaksjon hvor to partikler kolliderer og produserer flere nye partikler.

(d) Betrakt et π^+ meson som kolliderer med et nøytron hvor sistnevnte er i ro i lab-systemet. Denne kollisjonen produserer et K^+ meson og en Λ hyperon. Hva er terskelenergien for denne reaksjonen i lab-systemet? Massene til partiklene er $m_\pi, m_n, m_K, m_\Lambda$.

(e) Betrakt en pendel bestående av en masseløs stav med fast lengde og en punktmasse festet til enden. Pendelen kan bevege seg i samtlige tre dimensjoner. Hvor mange frihetsgrader har dette systemet? Utled bevegelseslikningene for de generaliserte koordinatene som beskriver dette systemet.

(f) To partikler med hvilemasser m_1 and m_2 beveger seg mot hverandre langs z-aksen med hastigheter v_1 and v_2, respektive, i en observatørs koordinatsystem. Ved kollisjon smelter de sammen til en ny partikkel med hvilemasse m_3 som beveger seg med hastighet v_3 i forhold til observatøren. Finn et uttrykk for m_3 og v_3 som funksjon av m_1, m_2, v_1, v_2. Er det mulig at den nye partikkelen m_3 er et foton dersom verken m_1 eller m_2 er lik null?

(g) Gi en detaljert beskrivelse av sammenhengen mellom symmetrier og bevaringslover ved å bruke terminologien og rammeverket rundt Lagrange-formalismen. Gi også konkrete eksempler.

NYNORSK

OPPGÅVE 1 (20%)

Delspurnadene **(a)** – **(f)** nedenfor er fleirvalsoppgåver. Vel eit eller fleire av alternativa i)-iv) som det korrekte svaret/svara.

(a) Føringer som kan uttrykkjast som likningar avhengig av rom og tid på måten $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, t) = 0$ er:

i) Krusiforme.
ii) Holonomiske.
iii) Ikkje-holonomiske.
iv) Skleronome.

(b) Lagrange-likningane kan skrivast på forma:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \tag{5}$$

i) Når alle friksjonskreftar er inkludert i Lagrangefunksjonen.
ii) Aldri.
iii) Når L inneholder potensialet frå konservative kreftar og Q_j representerer kreftar som ikkje kjem frå slike potensialer.
iv) Berre når $L = T - V$ og Q_j er den generaliserte krafta som kjem frå konservative potensiale.

(c) Hamiltons prinsipp er eit døme på:

i) Ein Hamiltonfunksjon.
ii) Et variasjonsprinsipp.
iii) Ein Lagrange multiplikator.
iv) Ei generalisert kraft.

(d) La $p_j = \partial L/\partial \dot{q}_j$ vere ein kanonisk impuls. Dersom Lagrangefunksjonen er syklisk i q_j, så er følgjande sant:

i) p_j er ikkje verna.
ii) q_j opptrer i Lagrangefunksjonen.
iii) $\dot{q}_j$ opptrer ikkje i Lagrangefunksjonen.
iv) p_j er verna.

(e) Kanoniske transformasjonar kan ofte identifiserast på ein praktisk måte ved å bruke ein:

i) Lagrange multiplikator.
ii) Gap transformasjon.
iii) Genererande funksjon.
iv) Lorentz-boost.

(f) Det differensielle spreiingstverrsnittet avheng ikkje av følgjande eigenskap hos dei innkommende partiklane::

i) Fart.
ii) Masse.
iii) Ladning.
iv) Generelt sett avheng spreiingstverrsnittet av alle ovannemnde storleikar.

(g) Vurder følgjande Hamiltonfunksjon kor α og b er konstantar:

$$H = \frac{p^2}{2\alpha} - bpq\mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{b\alpha}{2}q^2\mathrm{e}^{-\alpha t}(\alpha + b\mathrm{e}^{-\alpha t}) + kq^2/2. \tag{6}$$

Utled den tilsvarende Lagrangefunksjonen $L = L(q, \dot{q}, t)$ og finn dessutan ein ekvivalent Lagrangefunksjon L' som ikkje har nokon eksplisitt tidsavhengighet. På grunnlag av det du finn: kan du seie noko om kva slags fysikk H ovanfor skildrar?

OPPGÅVE 2 (80%)

(a) Vurder spreiing forårsaka av ein repulsiv sentral kraft $F = kr^{-3}$ og introduser variabelen $u = 1/r$. Utled den generelle forma for løysinga $u = u(\theta)$ kor θ er vinkelen som skildrar banen til dei spreidde partiklane. Du treng ikkje å berekne verdet til ubestemte integrasjonskonstantar. *Tips:* $\int dx/\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2} = (1/\sqrt{-\gamma})\arccos[-(\beta+2\gamma x)/\sqrt{q}]$ kor $q = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

(b) Vurder eit bunde Kepler system beståande av ein planet i bane rundt eit gravitasjonssenter. Ved tida $t = t_0$ fjernar vi instantant all kinetisk energi til planeten. Dersom banen før t_0 var ein sirkel, finn eit uttrykk for tida t_c som det tek mælt frå t_0 før planeten kolliderer med gravitasjonssenteret. Uttryket skal berre vere avhengig av baneperioden τ som planeten hadde før t_0.

Tips 1: Keplers andre lov kan (eller kan ikkje) vere nyttig å bruke her: $dA/dt = l/(2m)$ =konstant, kor dA er arealet som planeten sveiper over i eit tidsintervall dt medan l er planeten sin dreieimpuls og m er massen dens.

Tips 2: Ei likning $\ddot{r} = -c/r^2$ kan skrivast om til $\frac{d}{dt}(\dot{r}^2) = \frac{d}{dt}(2c/r)$ ved å multiplisere han med $2\dot{r}$.

(c) Skildre nøyaktig kva som vert med meint *terskelenergi* i samanheng med relativistiske partikkelkollisjoner. Drøft korleis ein bør designe eksperiment for å oppnå lågast mogleg terskelenergi for ein reaksjon der to partiklar kolliderer og produserer fleire nye partiklar.

(d) Vurder eit π^+ meson som kolliderer med eit nøytron kor sistnemnde er i ro i lab-systemet. Denne kollisjonen produserer eit K^+ meson og ein Λ hyperon. Kva er terskelenergien for denne reaksjonen i lab-systemet? Massane til partiklane er $m_\pi, m_n, m_k, m_\Lambda$.

(e) Vurder ein pendel beståande av ein masselaus stav med fast lengd og ein punktmasse festa til enden. Pendelen kan røre seg i alle tre dimensjonar. Kor mange fridomsgrader har dette systemet? Utled rørslelikningane for dei generaliserte koordinatane som skildrar dette systemet.

(f) To partiklar med kvilemasser m_1 and m_2 rører seg mot kvarandre langs z-aksen med fartar v_1 and v_2, høvesvis, i koordinatsystemet til ein observatør. Ved kollisjon smeltar dei saman til ein ny partikkel med kvilemasse m_3 som rører seg med fart v_3 i tilhøve til observatøren. Finn eit uttrykk for m_3 og v_3 som funksjon av m_1, m_2, v_1, v_2. Er det mogleg at den nye partikkelen m_3 er eit foton dersom verken m_1 eller m_2 er lik null?

(g) Gje ei detaljert skildring av samanhengen mellom symmetriar og vernelover ved å bruke terminologien og rammeverket rundt Lagrange-formalismen. Gje òg konkrete døme.