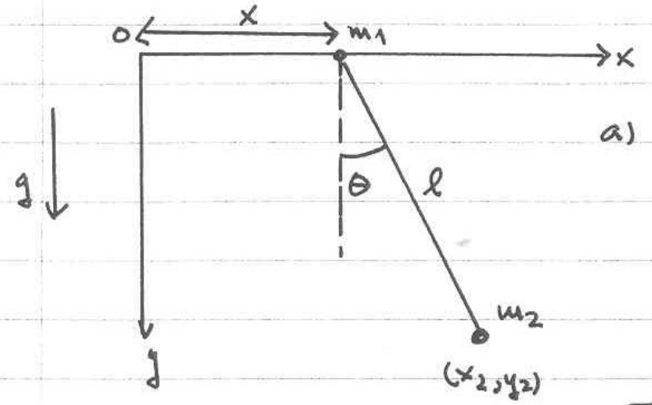
TEP4145 KLASSISK MEKANIKK EKSAMEN 3. JUNI 2006

Løsning Oppgave 1



a) m_1 glir uten friksjon langs x-aksen.

$x_2 = x + l\sin\theta$, $y_2 = l\cos\theta$

Kinetiske energier:

$T_1 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2$,

$T_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$.

Da $\dot{x}_2 = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta$, $\dot{y}_2 = -l\dot{\theta}\sin\theta$ fås

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2).$$

Potensielle energier:

$V_1 = 0$ (valgt nullnivå), $V_2 = -m_2 g l\cos\theta$. Dette gir

$\underline{L} = T - V = \underline{\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2) + m_2 g l\cos\theta.}$

b) x er syklisk koordinat (inneholdes ikke i L), slik at den tilhørende kanoniske impulskomponent p_x = konstant. Ved translasjon i retning $\vec{n}$ er generelt $p_j = \vec{n}\cdot\vec{P}$.

Her: $\vec{n} = \vec{e}_x$, slik at $p_x = P_x$: <u>total impuls i x-retning er konstant.</u>

Av $p_x = \partial L/\partial\dot{x}$ fås $p_x = (m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\theta}\cos\theta =$ konstant. Integrerer med hensyn på t: Da $p_x = 0$ blir

$$\underline{(m_1+m_2)x + m_2 l\sin\theta = \text{konstant}} \quad ①$$

Av $(m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\theta}\cos\theta = 0$ løses ut $\dot{x}$:

$$\dot{x} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}l\dot{\theta}\cos\theta$$

Dette settes inn i uttrykket for E:

Oppgave 1, forts.

$$E = T + V = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2) - m_2 g l\cos\theta$$

$\Rightarrow$

$$E = \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\theta}^2\left(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\cos^2\theta\right) - m_2 g l\cos\theta$$

c) Ligning ① bestemmer posisjonen av massesenteret CM i x-retning. Da denne posisjonen velges lik null, blir

$$(m_1+m_2)x + m_2 l\sin\theta = 0$$

(CM beveger seg opp og ned på y-aksen).

Altså $x = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\cdot l\sin\theta$. Det gir

$$x_2 = x + l\sin\theta = \frac{m_1}{m_1+m_2}l\sin\theta, \text{ mens } y_2 = l\cos\theta \text{ som før.}$$

$$\Rightarrow \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \quad \text{hvor } a = \frac{m_1}{m_1+m_2}\cdot l, \quad b = l.$$

Hvis $m_1 \to \infty$: $a \to l$. Da er opphengningspunktet fast (i origo O). Bevegelsen av m_2 foregår på en sirkelbue, $x_2^2 + y_2^2 = l^2$.

Løsning Oppgave 2

a) Ved rotasjon om et fast punkt er $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Når gravitasjonen utelates, er $T = E$. Dermed blir

$$\underline{E} = \sum \tfrac{1}{2} m v^2 = \sum \tfrac{1}{2} m \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \sum \tfrac{1}{2} m \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

$$= \tfrac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underbrace{\sum \vec{r} \times m\vec{v}}_{\vec{L}} = \underline{\tfrac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}}. \qquad ①$$

Rotasjonssymmetrisk legeme, $I_1 = I_2$, x_3 som symmetriakse, gir

$L_1 = I_1 \omega_1$, $L_2 = I_1 \omega_2$, $L_3 = I_3 \omega_3$.

Eulerligningen blir $\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = 0$ når $\vec{N} = 0$.

Tar komponentene inn på legemets akser:

$$I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (I_1 - I_3) = 0$$
$$I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) = 0$$
$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega_3 = \text{konstant}}$$

Innfører $\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3$.

De to første ligningene kan skrives slik:

$\dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2$, $\dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1$. Eliminerer ω_2:

$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0$, som har typisk løsning $\underline{\omega_1 = A \cos \Omega t}$.

Denne gir $\underline{\omega_2 = A \sin \Omega t}$.

Da følger $\underline{\omega_1^2 + \omega_2^2 = A^2}$, som oppgitt i teksten.

b) Dekomponerer $\vec{L}$: $\vec{L} = I_1 \omega_1 \vec{i} + I_1 \omega_2 \vec{j} + I_3 \omega_3 \vec{k}$, som ved kvadrering gir $L^2 = I_1^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3^2 \omega_3^2 = I_1^2 A^2 + I_3^2 \omega_3^2$.

Løser mhp. ω_3^2:

$$\underline{\omega_3^2 = \frac{L^2 - I_1^2 A^2}{I_3^2}} \qquad ②$$

Benytter så ①: $E = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$

$$= \tfrac{1}{2} I_1 A^2 + \tfrac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

TEP4145 Klassisk mekanikk 3. juni 2006

Oppgave 2, forts.

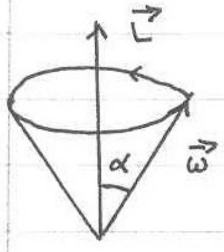
Her innsettes ω_3^2 fra 2:

$$E = \frac{1}{2} I_1 A^2 + \frac{1}{2} I_3 \frac{L^2 - I_1^2 A^2}{I_3^2}$$

$$\Rightarrow \quad A^2 = \frac{2 E I_3 - L^2}{I_1 (I_3 - I_1)}$$

c) Sett utenfra: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = 0$, $\vec{L} =$ konstant.

$\vec{L}$ presesserer ikke. Derimot presesserer $\vec{\omega}$ omkring $\vec{L}$.



Dette følger av utviklingene av $\vec{\omega}$ og $\vec{L}$ på legemets akser:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k}$$

$$\vec{L} = I_1 (\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j}) + I_3 \omega_3 \vec{k}$$

Tar produktet: $\vec{L} \cdot \vec{\omega} = L \omega \cos\alpha$.

Fra $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = A^2 + \omega_3^2$, $L^2 = I_1^2 A^2 + I_3^2 \omega_3^2$, og

$\vec{L} \cdot \vec{\omega} = I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3 \omega_3^2 = I_1 A^2 + I_3 \omega_3^2$, får

$$\cos\alpha = \frac{\vec{L} \cdot \vec{\omega}}{L \omega} = \frac{I_1 A^2 + I_3 \omega_3^2}{\sqrt{I_1^2 A^2 + I_3^2 \omega_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + \omega_3^2}}$$

TEP4145 Klassisk mekanikk 3. juni 2006

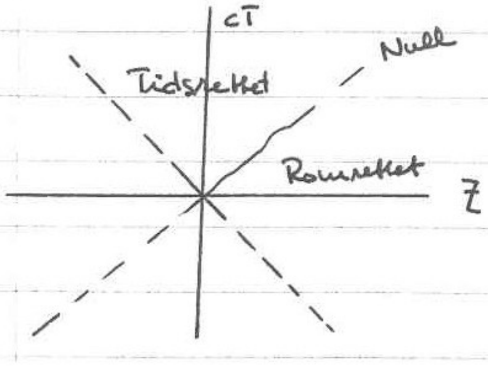
Løsning Oppgave 3

a) Lorentztransformasjon $x_\mu' = L_{\mu\nu} x^\nu$ er ortokron når $L_{44} > 1$
(det betyr ingen tidsinversjon).
Enhver Lorentztransformasjon er ortogonal, slik at determinanten $|\mathbb{L}|$ oppfyller $|\mathbb{L}|^2 = 1$.
Transformasjonen er proper (ekte) når $|\mathbb{L}| = +1$.
(Romaksene inverteres ikke.)
Lorentztransformasjonen

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma(z - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} z\right), \text{ hvor } \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}, \quad \beta = v/c.$$

Ser på differansevektoren $X_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu}$.
Velger $X_\mu = (0, 0, Z, icT)$. En har da

$$T' = \gamma\left(T - \frac{v}{c^2} Z\right) = \frac{\gamma}{c}(cT - \beta Z) \qquad (1)$$



I romrettet område er $cT < Z$ (velger T og Z positive).
Av (1) følger at $T' = 0$ med $\beta < 1$. I romrettet område kan altså 1 og 2 gjøres samtidige.
Ellers ikke.

TEP 4145 Klassisk mekanikk 3. juni 2006

Løsning Oppgave 3, forts.

b)

$\overset{1}{\underset{m}{\bullet}} \xrightarrow{\quad} \vec{p}_1 \qquad\qquad \overset{2}{\underset{m}{\bullet}} \quad \vec{p}_2 = 0.$

Total 4-impuls $P_\mu = p_{1\mu} + p_{2\mu}$. Generelt er $p_\mu p_\mu = -m^2c^2$.
Da $P_\mu P_\mu$ er invariant, har den samme verdi som i CM-systemet, hvor $P'_\mu P'_\mu = -M^2c^2$, M = ekvivalent masse.

Regner ut

$$P_\mu P_\mu = (p_{1\mu}+p_{2\mu})(p_{1\mu}+p_{2\mu}) = \overbrace{p_{1\mu}p_{1\mu}}^{-m^2c^2} + \overbrace{p_{2\mu}p_{2\mu}}^{-m^2c^2} + 2p_{1\mu}p_{2\mu} = -M^2c^2.$$

$$-2m^2c^2 + 2(\underbrace{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}_{0} - \frac{1}{c^2}E_1\underbrace{E_2}_{mc^2}) = -M^2c^2$$

$$\underline{M^2c^2 = 4m^2c^2 + 2mK_1} \qquad (1)$$

Terskelenergi er den minste verdi av K_1 som gjør reaksjonen mulig. Da vil nye partikler produseres, men de får ingen kinetisk energi.

Reaksjon $p + N \to p + N + 2p + 2\bar{p}$ (2)

[Reaksjonens Q-verdi er

$Q = \sum m_n - 2m = 6m - 2m = 4m$.]

Alle 6 partikler på høyre side av (2) er i ro.

$M = 6m$. Da gir (1) $(6m)^2c^2 = 4m^2c^2 + 2mK_1$

$$\underline{K_1 = 16\,mc^2}$$

Løsning av Oppgave 4 Har følgende lineære, inhomogene differanselikning

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{4} + a \quad \text{når} \quad n \geq 0 \quad \text{og} \quad a_0 = 0, \qquad \text{med løsningen } a_n = \frac{4}{3}a\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

a) Differanselikningen som viser antallet studenter som går i andre klasse etter n år er: $\underline{\underline{b_{n+1} = \frac{1}{5}b_n + \frac{3}{5}a_n}}$ eller $\underline{\underline{b_{n+1} - \frac{1}{5}b_n = \frac{4}{5}a\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}}$

Løsningen av likningen består av èn løsning av den inhomogene likningen pluss løsningen av den tilhørende homogene likningen.
Som partikulær løsning av den inhomogene likningen

forsøkes $b_n^{(p)} = A\left(\frac{1}{4}\right)^n + Bn + C$, det gir $b_n^{(p)} = -16a\left(\frac{1}{4}\right)^n + a$.

Den homogene likningen: $b_{n+1} - \frac{1}{5}b_n = 0$, har løsningen $b_n^{(h)} = k \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Benytter at $b_0 = 0$ og får løsningen $\underline{\underline{b_n}} = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = \underline{\underline{15a\left(\frac{1}{5}\right)^n - 16a\left(\frac{1}{4}\right)^n + a}}$

b) Studentantallet skal stabilisere seg på 280, det vil si: $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 280$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4}{3}a\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) + 15a\left(\frac{1}{5}\right)^n - 16a\left(\frac{1}{4}\right)^n + a\right\} = \frac{4}{3}a + a = 280 \quad \Rightarrow \quad a = 120.$$

Det vil si at en hvert år bør ta opp $\underline{\underline{\text{120 nyestudenter}}}$ i første klasse

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}a\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} = \frac{4}{3}a \quad \Rightarrow$$ I år n er antallet studenter i første klasse 160

Og tilsvarene $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left\{15a\left(\frac{1}{5}\right)^n - 16a\left(\frac{1}{4}\right)^n + a\right\} = a \Rightarrow$ 120 studenter i andre klasse.

c) En vil oppnå en bedre utnyttelse av kapasiteten ved skolen hvis en lar begge klassene få like mange studenter

Differenslikningen blir da: $c_{n+1} = \frac{1}{5}c_n + \frac{3}{5}a_n + N$ eller $c_{n+1} - \frac{1}{5}c_n = \frac{4}{5}a - \frac{4}{5}a\left(\frac{1}{4}\right)^n + N$

Benytter følgende prøveløsning av den inhomogene likningen:

$$c_n^{(p)} = A\left(\frac{1}{4}\right)^n + Bn + C, \text{ som gir } b_n^{(p)} = a - 16a\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{5}{4}N$$

Løsningen av den homogene likningen, $b_{n+1} - \frac{1}{5}b_n = 0$ er $b_n^{(k)} = k\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Innsetter $c_0 = 0$ i løsningen $c_n = k\left(\frac{1}{5}\right)^n - 16a\left(\frac{1}{4}\right)^n + a + N\cdot\frac{5}{4}$ og finner $k = 15a - \frac{5}{4}N$

Dermed har vi følgende løsning: $$\underline{\underline{c_n = \left(15a - \frac{5}{4}N\right)\left(\frac{1}{5}\right)^n - 16a\left(\frac{1}{4}\right)^n + a + \frac{5}{4}N}}$$

Innsetter $N = 28$ og får løsningen $$\underline{\underline{c_n = (15a - 35)\left(\frac{1}{5}\right)^n - 16a\left(\frac{1}{4}\right)^n + a + 35}}$$

Det totale antallet studenter er 280 det vil si: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + c_n) = 280 \Rightarrow \frac{4}{3}a + a + 35 = 280$

$\Rightarrow$ antallet nye studenter som taes opp i første klasse hvert år er $a = 105$

Til kontroll har vi: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty}\left\{\frac{4}{3}a\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\right\} = \frac{4}{3}a = \frac{4}{3}\cdot 120 = 140$

Og tilsvarende: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a + 35 = 140$

Innsetter $a = 105$ i løsningen og får: $$\underline{\underline{c_n = 140\left\{1 + 11\left(\frac{1}{5}\right)^n - 12\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}}$$

Det gir:

$$\begin{aligned}
c_1 &= 140\cdot\frac{1}{5} &&= \underline{\underline{28}} \\
c_2 &= 140\cdot\frac{69}{100} &&\approx \underline{\underline{97}} \\
c_3 &= 140\cdot\frac{1801}{2000} &&\approx \underline{\underline{126}} \\
c_4 &= 140\cdot\frac{38\,829}{40\,000} &&\approx \underline{\underline{136}}
\end{aligned}$$