

# Løsningsforslag til eksamen i klassisk mekanikk våren 2010

## Oppgave 1

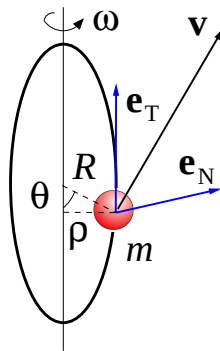


Figure 1:

a) Lagrangefunksjonen er gitt ved:

$$L = T - V$$

der  $T$  ( $V$ ) er den kinetiske (potensielle) energien til systemet. Finner først den kinetiske energien:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Hastighetsvektoren  $\mathbf{v}$  kan dekomponeres i en komponent tangentielt på sirkelen og en normalt på sirkelplanet, som antydnet i figur 1:

$$\mathbf{v} = v_T \mathbf{e}_T + v_N \mathbf{e}_N$$

Her er

$$v_T = R\dot{\theta}$$

og

$$v_N = \rho\omega = (R \sin \theta) \omega$$

Den kinetiske energien blir dermed:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_T^2 + v_N^2) = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta)$$

Den potensielle energien er:

$$V = mgh = mgR(1 - \cos \theta)$$

når vi velger nullpunkt slikt at  $V = 0$  på 'bunnen' av sirkelen. Lagrange-funksjonen blir dermed

$$L = \frac{1}{2}mR^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) - mgR(1 - \cos \theta)$$

som var det vi skulle vise.

b) Finner bevegelsesligningen for koordinaten  $\theta$  fra Lagranges ligning:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

Venstre side:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt} (mR^2 \dot{\theta}) = mR^2 \ddot{\theta}$$

Høyre side:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta$$

så:

$$mR^2 \ddot{\theta} = mR^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta$$

og ved å dele på  $mR^2$  får vi:

$$\ddot{\theta} = (\omega^2 \cos \theta - g/R) \sin \theta$$

som var det vi skulle vise.

c) Betingelsen  $\ddot{\theta} = 0$  gir oss ligningen:

$$(\omega^2 \cos \theta - g/R) \sin \theta = 0$$

Denne er oppfylt dersom  $\sin \theta = 0$  og/eller

$$\cos \theta = \frac{g}{R\omega^2}$$

Siden  $|\cos \theta| \leq 1$  kan det siste bare være oppfylt når

$$\omega^2 \geq \frac{g}{R}$$

Konklusjon:

Når vinkelhastigheten  $\omega$  er 'liten',  $\omega^2 < \frac{g}{R}$ , fins det to likevektspunkter:

$$\theta_{0,1} = 0 \quad \text{og} \quad \theta_{0,2} = \pi$$

som svarer til at kula er på ‘toppen’ eller ‘bunnen’ av sirkelen. Dersom vinkelhastigheten er høy nok,  $\omega^2 \geq \frac{g}{R}$ , fins det ytterligere to likevektspunkter:

$$\theta_{0,1} = 0, \quad \theta_{0,2} = \pi, \quad \theta_{0,3} = -\arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right) \quad \text{og} \quad \theta_{0,4} = \arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$$

og altså til sammen fire likevektspunkter.

## Oppgave 2

a) Lagrangefunksjonen til systemet er gitt ved

$$L = T - V$$

Den potensielle energien kan deles opp slik

$$V = V_{\text{gravitasjon}} + V_{\text{fjær}}$$

der (se figur 2)

$$\begin{aligned} V_{\text{gravitasjon}} &= mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_2) \\ &= mgl(2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) \end{aligned}$$

og

$$V_{\text{fjær}} = \frac{k}{2}(d - d_0)^2$$

Ser først på  $V_{\text{gravitasjon}}$ . Vi antar små utslag så  $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$  og

$$V_{\text{gravitasjon}} \approx \frac{1}{2}mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2)$$

Men

$$\frac{\eta_1}{l} = \sin \theta_1 \approx \theta_1 \tag{1}$$

og tilsvarende for  $\eta_2$ , så

$$V_{\text{gravitasjon}} \approx \frac{1}{2}mgl(\eta_1^2 + \eta_2^2)$$

Ser så på  $V_{\text{fjær}}$ . Ved å studere figur 2 kan en finne at

$$d^2 = (d_0 + \eta_2 - \eta_1)^2 + \left( \sqrt{l^2 - \eta_1^2} - \sqrt{l^2 - \eta_2^2} \right)^2$$

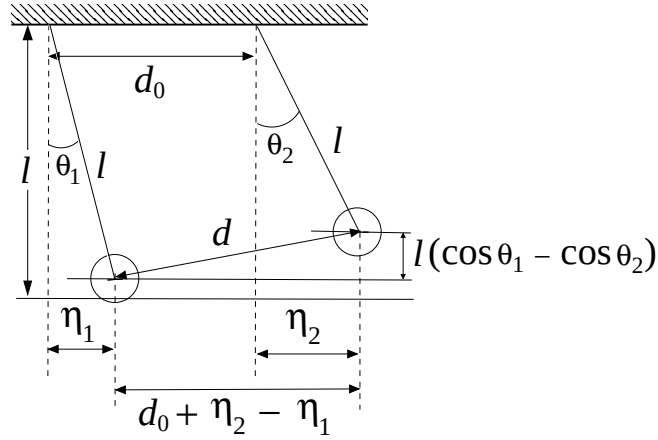


Figure 2:

Ved å ta kvadratrota på begge sider og trekke ut en faktor kan dette skrives

$$d = (d_0 + \eta_2 - \eta_1) \sqrt{1 + \left( \frac{\sqrt{l^2 - \eta_1^2} - \sqrt{l^2 - \eta_2^2}}{d_0 + \eta_2 - \eta_1} \right)^2}$$

Nå har vi antatt at utslagene  $\eta_1$  og  $\eta_2$  er små, så vi kan rekkeutvikle:

$$\sqrt{1 + \left( \frac{\sqrt{l^2 - \eta_1^2} - \sqrt{l^2 - \eta_2^2}}{d_0 + \eta_2 - \eta_1} \right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2d_0^2 l^2} (\eta_2^2 - \eta_1^2)^2$$

Vi får dermed følgende approksimasjon for  $d - d_0$ :

$$d - d_0 \approx \eta_2 - \eta_1 + \frac{1}{2d_0 l^2} (\eta_2^2 - \eta_1^2)^2$$

eller når vi neglisjerer ledd av fjerde orden og høyere:

$$d - d_0 \approx \eta_2 - \eta_1 \quad (2)$$

Så bidraget  $V_{\text{fjær}}$  til den potensielle energien kan approksimeres ved

$$V_{\text{fjær}} = \frac{k}{2} (\eta_2 - \eta_1)^2 = \frac{k}{2} (\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_1\eta_2)$$

og den totale potensielle energien til systemet ved:

$$V = \frac{1}{2} mgl (\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{k}{2} (\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_1\eta_2)$$

når en antar små utslag. Finner så den kinetiske energien:

$$T = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

der

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2$$

(og tilsvarende for  $v_2^2$ ) når vi antar at pendlene svinger i  $xy$ -planet. Innfører polarkoordinater og finner:

$$v_1^2 = l^2\dot{\theta}_1^2$$

Antar så små utslag, bruker ligning (1), og finner:

$$v_1^2 \approx \dot{\eta}_1^2$$

og tilsvarende for  $v_2^2$ . Den kinetiske energien er altså

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2)$$

under antagelsen om små utslag, og lagrangefunksjonen til systemet blir:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \frac{1}{2}mgl(\eta_1^2 + \eta_2^2) - \frac{k}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\eta_1\eta_2)$$

som var det vi skulle vise.

b) Bevegelsesligningene finner vi ved å sette inn lagrangefunksjonen i Lagranges ligninger:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = \frac{\partial L}{\partial \eta_i} \quad i = 1, 2$$

Koordinat  $\eta_1$ :

Venstre side:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_1} = \frac{d}{dt} (m\dot{\eta}_1) = m\ddot{\eta}_1$$

Høyre side:

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_1} = -\frac{mg}{l}\eta_1 - k(\eta_1 - \eta_2)$$

Tilsvarende beregning for  $\eta_2$  gir følgende (koblede!) bevegelsesligninger:

$$m\ddot{\eta}_1 + \frac{mg}{l}\eta_1 + k(\eta_1 - \eta_2) = 0 \quad (3)$$

$$m\ddot{\eta}_2 + \frac{mg}{l}\eta_2 + k(\eta_2 - \eta_1) = 0 \quad (4)$$

c) Ved å sette inn

$$\eta_i = C a_i e^{-i\omega t} \quad i = 1, 2$$

i bevegelsesligningene og dele på  $C e^{-i\omega t}$  får vi:

$$-m\omega^2 a_1 + \frac{mg}{l} a_1 + k(a_1 - a_2) = 0$$

$$-m\omega^2 a_2 + \frac{mg}{l} a_2 + k(a_2 - a_1) = 0$$

Vi kan skrive dette på matriseform:

$$V a = \omega^2 T a$$

der

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad T = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad V = \begin{pmatrix} \frac{mg}{l} + k & -k \\ -k & \frac{mg}{l} + k \end{pmatrix}$$

Legg merke til at dette er et standard egenverdiproblem siden  $T$  er diagonal. Ligningssettet har ikke-triviell løsning når  $\det(V - \omega^2 T) = 0$ :

$$\det(V - \omega^2 T) = \begin{vmatrix} \frac{mg}{l} + k - m\omega^2 & -k \\ -k & \frac{mg}{l} + k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Dette gir oss følgende andregradsligning for  $\omega^2$ :

$$m^2 \omega^4 - 2m\omega^2 \left(k + \frac{mg}{l}\right) + \left(k + \frac{mg}{l}\right)^2 - k^2 = 0$$

som kan faktorerises:

$$\left(m\omega^2 - \frac{mg}{l}\right) \left[m\omega^2 - \left(\frac{mg}{l} + 2k\right)\right] = 0$$

og da ser vi at egenfrekvensene er:

$$\underline{\underline{\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}}}$$

d) Egenvektoren som hører til frekvens  $\omega_j$  (mode  $j$ )

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{pmatrix},$$

finner vi ved å sette inn egenfrekvensen  $\omega_j$  i ligningsettet (3-4):

$$-m\omega_j^2 a_{1j} + \frac{mg}{l} a_{1j} + k(a_{1j} - a_{2j}) = 0$$

$$-m\omega_j^2 a_{2j} + \frac{mg}{l} a_{2j} + k(a_{2j} - a_{1j}) = 0$$

Eller, litt omskrevet, i:

$$\left(\frac{mg}{l} + k - m\omega_j^2\right) a_{1j} - k a_{2j} = 0 \quad (5)$$

$$-k a_{1j} + \left(\frac{mg}{l} + k - m\omega_j^2\right) a_{2j} = 0 \quad (6)$$

Mode 1,  $\omega_1$ :

Ved substitusjon av  $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  i ligning (5) finner vi:

$$a_{11} = a_{21}$$

altså svinger pendlene i fase, forflytter seg like langt og i samme retning.

Mode 2,  $\omega_2$ :

Ved substitusjon av  $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}$  i ligning (5) finner vi:

$$a_{12} = -a_{22}$$

så pendlene går mot hverandre (eksakt ut av fase), med like store forflytninger. Figur 3 illustrerer de to normalmodene.

### Oppgave 3

I dette løsningsforslaget bruker jeg *reell metrikk*. På eksamen var det valgfritt. Med reell metrikk er Mandelstamvariablene gitt ved:

$$s \equiv (p_A + p_B)^2/c^2$$

$$t \equiv (p_A - p_C)^2/c^2$$

$$u \equiv (p_A - p_D)^2/c^2$$

der  $p_A$  er firerimpulsen til partikkel  $A$ , og så videre:

$$p_A = (E_A/c, \mathbf{p}_A)$$

og tilsvarende for  $p_B$ ,  $p_C$  og  $p_D$ .

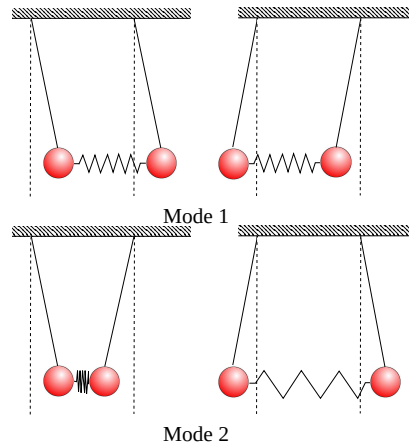


Figure 3:

- a) Mandelstamparametrene er skalare størrelser siden de er skalarprodukt av firervektorer, og dermed relativistisk invariante størrelser. La oss vise det eksplisitt for  $s$ . Definer  $P$ :

$$P = p_A + p_B$$

slik at

$$s c^2 = P \cdot P$$

Lorentz-transformasjonen av  $P$  fra et system  $S$  til et annet  $S'$  er gitt ved

$$P'_\mu = L_\mu^\nu P_\nu$$

(oppgitt på eksamen). Skalarproduktet transformerer slik:

$$P' \cdot P' = P'_\mu P'^\mu = L_\mu^\alpha P_\alpha L_\beta^\mu P_\beta = L_\beta^\mu L_\mu^\alpha P_\alpha P_\beta = \delta_\beta^\alpha P_\alpha P_\beta = P^\alpha P_\alpha = P \cdot P$$

der vi har brukt (oppgitt på eksamen)

$$L_\beta^\mu L_\mu^\alpha = \delta_\beta^\alpha$$

Altså er  $P \cdot P$ , og dermed  $s$  en Lorentz-invariant størrelse som var det vi skulle vise.

- b) Fra definisjon av Mandelstamvariablene får vi

$$c^2 (s + t + u) = (p_A + p_B)^2 + (p_A - p_C)^2 + (p_A - p_D)^2$$



og videre

$$c^2(s + t + u) = p_A^2 + p_B^2 + p_C^2 + p_D^2 + 2p_A(p_A + p_B - p_C - p_D)$$

Det siste leddet på høyre side er lik null. Det følger fra firerimpulsbevarelse:

$$p_A + p_B = p_C + p_D$$

Bruker vi så

$$p_A^2 = m_A^2 c^2$$

og tilsvarende for  $p_B^2$ ,  $p_C^2$  og  $p_D^2$ , får vi

$$c^2(s + t + u) = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 + m_C^2 c^2 + m_D^2 c^2$$

og ved å dele på  $c^2$ :

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2$$

som vi skulle vise.

c) Vi kan ta utgangspunkt i

$$s c^2 = (p_A + p_B)^2$$

Ekspanderer:

$$s c^2 = p_A^2 + p_B^2 + p_A \cdot p_B$$

De to første leddene på høyre side er lik  $m_A^2 c^2$  og  $m_B^2 c^2$ . Partikkel B er i ro i lab-systemet, så  $p_B = (E_B^{\text{lab}}/c, \mathbf{p}_B) = (m_B c, 0)$ , og med  $p_A = (E_A^{\text{lab}}/c, \mathbf{p}_A)$  får vi for det siste leddet

$$p_A \cdot p_B = m_B E_A^{\text{lab}}$$

så

$$s c^2 = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 + 2 m_B E_A^{\text{lab}}$$

Løst for  $E_A^{\text{lab}}$ :

$$E_A^{\text{lab}} = \frac{(s - m_A^2 - m_B^2) c^2}{2 m_B}$$

som var det vi skulle vise.