

- Referansegruppe

Navn

Brukernavn på
stud.ntnu.no

MTK3

MTMT

BK3

MTMART

MTMASKIN

MTINGGEO

MTGEORT

- Ernneside

web.phys.ntnu.no/~stouneng/TFY4104_2024/efy4104.htm

- Labsider

home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslabNB: Info om Lab i R7 fredag 23/8 kl 10¹⁵

- Hovedtema

Mekanikk

Elektromagnetisme

- Hovedbok

openstax.org University Physics Volume 1 og 2

MEKANIKK

②

Størrelser og enheter [OS1 1]

Eks: Lengde, spydkast, Markus Rooth, OL 2024

$L = 6687 \text{ cm}$ ← SI-enhet (m = meter)
symbol tallverdi dekadisk forstavelse (c = centi = 10^{-2})

Notasjon: $[L] = \text{m}$ ("enhet for lengde er meter")

Grunnenheter i SI-systemet:

meter	(m ; lengde)	}	mekanikk
kilogram	(kg ; masse)		
sekund	(s ; tid)		
ampere	(A ; strømstyrke)	}	elmag
kelvin	(K ; temperatur)		termodynamikk
mol	(mol ; stoffmengde)		
candela	(cd ; lysstyrke)		

Siden 20.mai 2019 fastlagt med utgangspunkt i eksakt definerte verdier for naturkonstantene

lysfarten i vakuum	$c = 299792458 \text{ m/s}$
elementærladningen	$e = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Plancks konstant	$h = 6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Boltzmanns konstant	$k_B = 1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Avogadros konstant	$N_A = 6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Sammensatte enheter:

Hastighet, fart $[v] = \text{m/s}$

Akselerasjon $[a] = \text{m/s}^2$

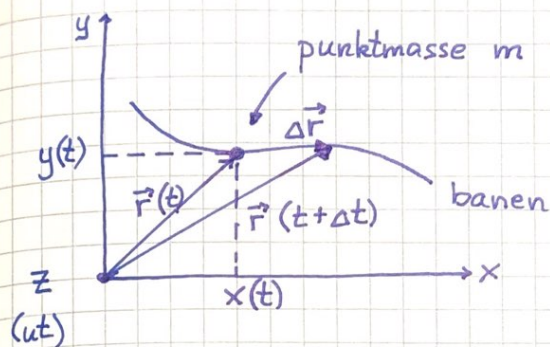
Avledete enheter:

Kraft $[F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$ (newton)

Kinematikk (Bevegelse)

[OS1 (2) 3, 4]

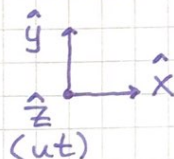
③



Posisjon ved tid t :

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

Enhetsvektorer $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$



$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dvs dimensjonsløse})$$

$$\text{skalarprodukt: } \hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 ; \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

$$\text{kryssprodukt: } \hat{x} \times \hat{y} = -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z} \quad (\text{osv. med høyrehåndsregel})$$

$$\hat{x} \times \hat{x} = 0$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = a \cdot b \cdot \cos \theta ; \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \theta$$



$$\text{Forflytning i løpet av } \Delta t: \Delta \vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Forflytning pr tidsenhet}$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} ; \quad \vec{v} \parallel \Delta \vec{r}, \text{ dvs tangent til banen}$$

Akselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Hastighetsendring pr tidsenhet}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} ; \quad \vec{a} \parallel d\vec{v}$$

Komponenter (kartesiske):

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \quad \text{med } v_x = dx/dt = \dot{x} \quad \text{osv}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} \quad \text{med } a_x = d^2x/dt^2 = \ddot{x} \quad \text{osv}$$

$\vec{r}$ og $\vec{v}$ er integraler av hhv $\vec{v}$ og $\vec{a}$:

(4)

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

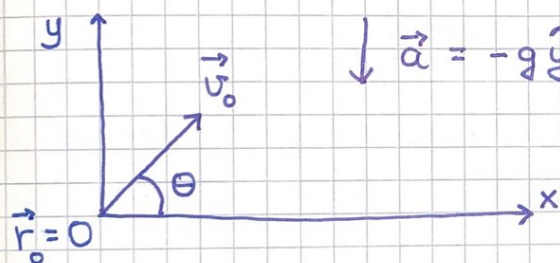
$$\vec{a} = d\vec{v}/dt \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt \Rightarrow \int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

Hvis $\vec{a}$ er konstant, og med $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ og $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2}$$

Eks: Skrått kast



$$\downarrow \vec{a} = -g \hat{y} \quad ; \quad g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$$

Bestem $\vec{r}(t)$ og banen $y(x)$

$$\text{Løsn: } \vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt \hat{y} \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \hat{y}$$

$$\text{dvs } x(t) = v_0 t \cos \theta \quad ; \quad y(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} gt^2$$

$$t = x / v_0 \cos \theta$$

$$\Rightarrow y(x) = x \tan \theta - x^2 g / 2 v_0^2 \cos^2 \theta \quad ; \quad \text{parabel}$$

Kastets lengde: Lander i $y=0$, dvs $\tan \theta = xg / 2 v_0^2 \cos^2 \theta$

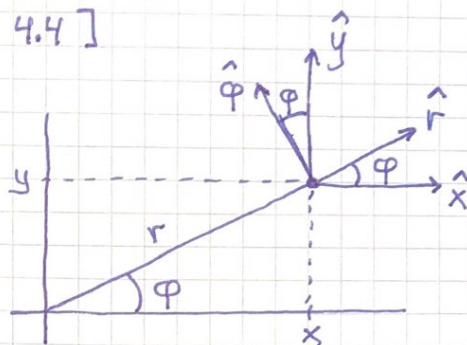
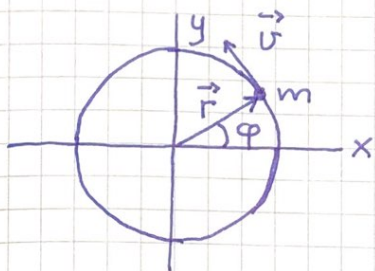
$$\text{dvs } x = (v_0^2 / g) \sin 2\theta$$

som er maksimal for $\theta = 45^\circ$

Sirkelbevegelse

[OS1 4.4]

⑤



Polarkoordinater:

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\hat{r}$; $\varphi > 0$ mot klokka

Fra figur:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x}r \cos \varphi + \hat{y}r \sin \varphi = r \hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \quad \hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

vinkel $\stackrel{\text{def}}{=} \text{buelengde/radius}$

$$d\varphi = ds/r; \quad [\varphi] = 1 \text{ evt rad}$$

vinkelfart $\stackrel{\text{def}}{=} \text{omløpt vinkel pr tidseenhet}$

$$\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi}; \quad [\omega] = 1/s \text{ evt rad/s}$$

vinkelakselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=} \text{vinkelfartsendring pr tidseenhet}$

$$\alpha = d\omega/dt = \dot{\omega} = d^2\varphi/dt^2 = \ddot{\varphi}; \quad [\alpha] = 1/s^2 \text{ evt rad/s}^2$$

Fra figur: $\vec{v} \parallel \hat{\varphi}$; $\vec{v} \perp \vec{r}$

Med liten (infinitesimal) dt og $d\varphi$:

$$|d\vec{r}| = dr = ds = r d\varphi$$

$$\Rightarrow v = dr/dt = r d\varphi/dt = r\omega$$

Dvs:

$$\boxed{\vec{v} = r\omega \hat{\varphi}}$$

Akselerasjon :

⑥

$$\vec{r} = \hat{x} r \cos\varphi + \hat{y} r \sin\varphi$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -\hat{x} r \dot{\varphi} \sin\varphi + \hat{y} r \dot{\varphi} \cos\varphi \quad [\text{kjernerregel}]$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= -\hat{x} r \ddot{\varphi} \cos\varphi - \hat{y} r \ddot{\varphi} \sin\varphi \\ &\quad -\hat{x} r \dot{\varphi}^2 \sin\varphi + \hat{y} r \dot{\varphi}^2 \cos\varphi \quad \left. \vphantom{\vec{a} = \dot{\vec{v}}} \right\} [\text{kjernerregel og produktregel}] \\ &= -\hat{r} r \dot{\varphi}^2 + \hat{\varphi} r \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

Sentripetalakselerasjon: $\vec{a}_{\perp} = -\hat{r} r \omega^2 = -\hat{r} v^2/r$; retning inn mot sirkelens sentrum.

Baneakselerasjon: $\vec{a}_{\parallel} = \hat{\varphi} r \alpha = \hat{\varphi} r \dot{\omega} = \hat{\varphi} \dot{v}$; retning tangentielt med sirkelbanen. Hvis ω og v er konstante, har vi uniform sirkelbevegelse med $a_{\parallel} = 0$.

Andre sentrale størrelser:

periode $\stackrel{\text{def}}{=}$ tid pr omløp

$$T = 2\pi r/v = 2\pi/\omega ; \quad [T] = s$$

frekvens $\stackrel{\text{def}}{=}$ antall omløp pr tidsenhet

$$f = 1/T = \omega/2\pi ; \quad [f] = 1/s = \text{Hz (hertz)}$$

Eks: [TFY4125 17/8-2024]

Karusell med $\omega(t) = \omega_0^3 t^2 \exp(-\omega_0 t/3)$; $\omega_0 = 0.30 \text{ rad/s}$

a) Hva er ω ved $t = 20 \text{ s}$?

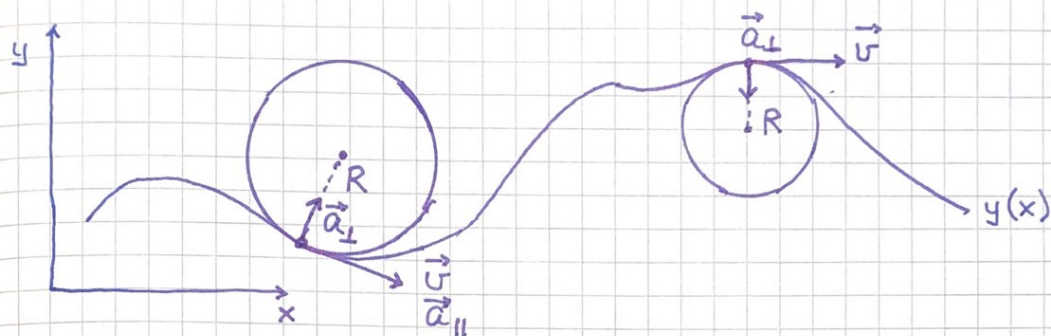
$$\omega(20) = 0.30 \text{ rad/s} \cdot 6.0^2 \exp(-2.0) = \underline{\underline{1.46 \text{ rad/s}}}$$

b) Hva er $\dot{\omega}$ ved $t = 20 \text{ s}$?

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \omega_0^3 \cdot 2t \cdot \exp(-\omega_0 t/3) + \omega_0^3 t^2 \exp(-\omega_0 t/3) \cdot (-\omega_0/3) \\ &= \omega_0^3 t \exp(-\omega_0 t/3) [2 - \omega_0 t/3] = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

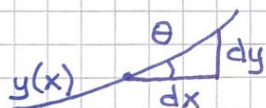
Krum bane :

⑦



banens krumningsradius $R = [1 + (y')^2] / |y''|$ er radien i en sirkel som best tangerer banen $y(x)$; $y' = dy/dx$; $y'' = d^2y/dx^2$ (se notater 2019 s.10-11 for utledning)

- $a_{\perp} = v^2/R$ inn mot sirkelens sentrum
- $y' = 0$ i topp- og bunnpunkter
- $y'' = 0$ i vendepunkter (og for rett bane)
- banens helningsvinkel :



$$dy/dx = \tan\theta \Rightarrow \theta = \arctan(dy/dx)$$

Eks: $y(x) = y_0 - x + x^2/y_0$; $y_0 = 100 \text{ cm}$

Hva er helningsvinkelen ved $x = 100 \text{ cm}$?

Løsn: $dy/dx = -1 + 2x/y_0 = 1$ når $x = 100 \text{ cm}$

$$\Rightarrow \theta = \arctan 1 = \underline{\underline{45^\circ}}$$

Newtons lover [OS1 5, 6]

(8)

$m, \vec{v}, \vec{a}$ = legemets masse, fart, akselerasjon

$\vec{F}$ = netto ytre kraft på legemet = vektorsummen av alle ytre krefter som virker på legemet

N1 : $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}$

N2 : $\vec{F} = m\vec{a}$

N3 : Krefter er vekselvirkninger mellom legemer. Når legeme 1 virker med kraft $\vec{F}_{12}$ på legeme 2, virker nr 2 med kraft $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ på nr 1.

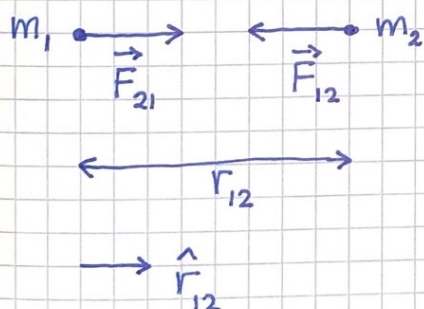
Enhet: $[F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$ (newton)

Impuls (bevegelsesmengde): $\vec{p} = m\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{F} = m d\vec{v}/dt = d(m\vec{v})/dt = d\vec{p}/dt$

Fundamentale naturkrefter [OS1 13.1 ; OS2 5.3]

Gravitasjon (tyngdekraft): Svak tiltrekning mellom masser.



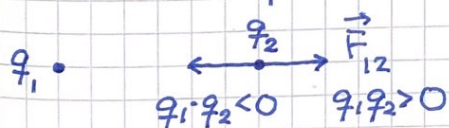
Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Gravitasjonskonstanten:

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2$$

Coulombkraft: Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger



Enhet for ladning:

$[q] = \text{C}$ (coulomb)

Coulombs lov:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Vakuumpermittiviteten:

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N m}^2$$

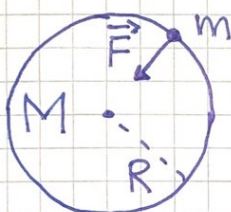
⑨

[Kjernekrefter : Svake og sterke krefter med kort rekkevidde.
Årsak til radioaktivitet og stabilitet av atomkjerener.]

Viktigst i mekanikken :

- Tyngdekraften fra jorda; evt. andre himmellegemer
- Kontaktkrefter; normalkraft og friksjonskraft.
(Begge disse er coulombkrefter.)

Tyngde [OS1 13.2 ; 5.4]



$$F = GMm/R^2 = \text{tyngden av } m$$

$$\text{Jorda: } M \approx 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg ; } R \approx 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow F = mg ; g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2,$$

tyngdens akselerasjon ved jordas overflate

Fritt fall når mg er eneste kraft på m ; N2 gir da $a=g$

Satellittbaner (sirkulære) :

$$a = v^2/r \Rightarrow GMm/r^2 = mv^2/r \Rightarrow \underline{v^2 r = GM} \quad (r > R)$$

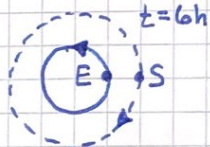
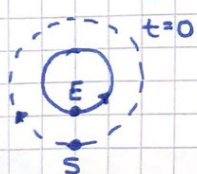
Eks :

a) Geostasjonære baner : Over ekvator med $T = 24 \text{ h}$

$$(2\pi r/T)^2 r = GM \Rightarrow r = \{GMT^2/4\pi^2\}^{1/3} = 4.22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$\Rightarrow h = r - R \approx 36000 \text{ km ; } v = \sqrt{GM/r} \approx 3 \text{ km/s}$$

b) [TFY 4125 17/8 - 2024] Satellitt over samme sted
ved ekvator hver 6. time ; motsatt omløpsretning av jorda.
Beregn radien i satellittens bane.



$$\text{Dvs, } T = 8 \text{ h} \Rightarrow \underline{r = 2.03 \cdot 10^7 \text{ m}}$$