

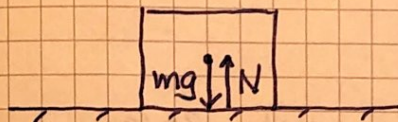
Kontaktkrefter

[OS1 5.6, 6.2, 6.4, 14.3]

(10)

Normalkraften N = normalkomponenten av kontaktkraften mellom to legemer

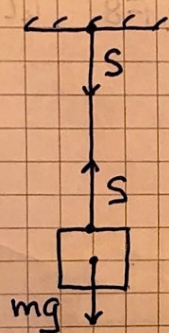
Eks:



Hvis kloss i ro: $N = mg$ (pga N1)

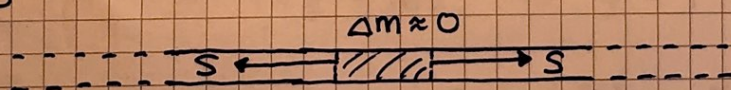
Snorkraft: S = kraft fra snora på det den er festet til

Eks:

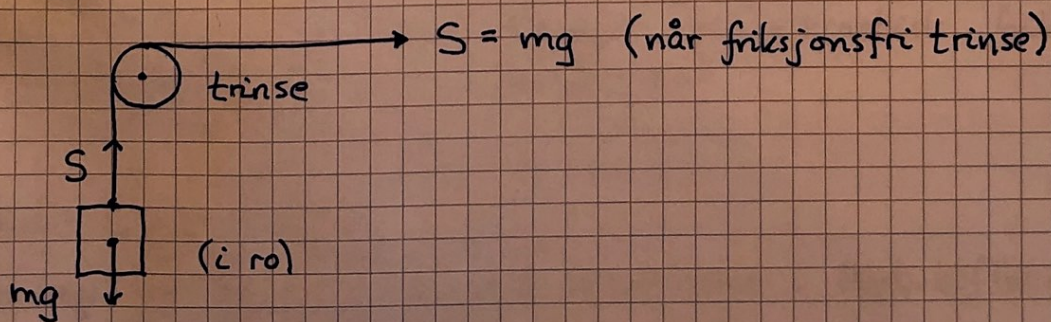


Kloss i ro gir $S = mg$ (N1)

Lette og utstrekte snorer har konstant snordrag S :

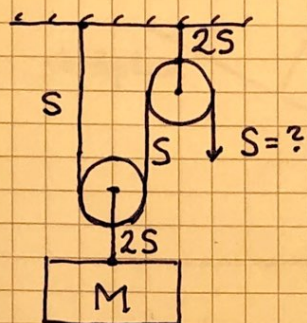


Trinser endrer retningen på $\vec{S}$:



Taljer gjør deg sterk:

(11)



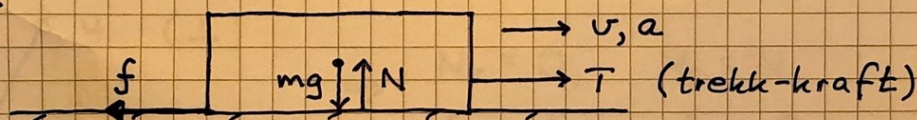
N1 for kassa: $2S = Mg$

$\Rightarrow$ Løfter kassa med
kraften $S = \frac{1}{2}Mg$

Fraksjon [OS1 6.2]

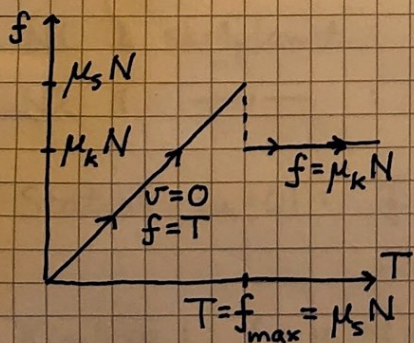
f = tangentiell komponent av kontaktkraft mellom to legemer
 $\vec{f}$ er rettet mot legemenes relative bevegelse

Eks:



N1 $\perp$ bordet $\Rightarrow N = mg$

N2 $\parallel$ ——— $\Rightarrow T - f = ma \Rightarrow f = T - ma$



Statisk fraksjon: Kloss i ro, $f = T$,
 $f_{\max} = \mu_s N$, μ_s = statisk fraksjons-
koeffisient

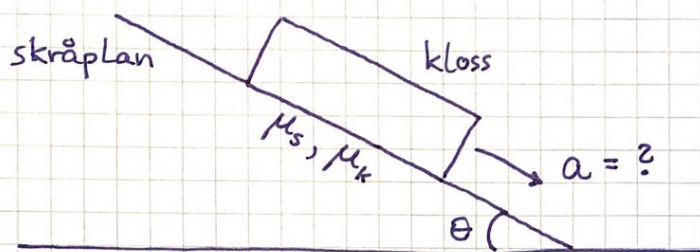
Kinetisk fraksjon: Klossen glir,
 $f = \mu_k N$, μ_k = kinetisk fraksjons-
koeffisient

Enhet: $[\mu] = 1$

Som regel er $\mu_s > \mu_k$: Små ujevnheter i kontaktflatene
gir best "grep" når $v = 0$

Eks; inkl. generell løsningsstrategi:

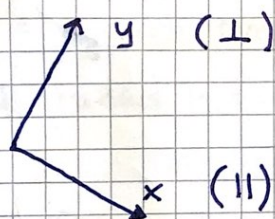
12



- Finn ytre krefter og tegn frtt-legeme-diagram



- Velg hensiktsmessig koordinatsystem og dekomponér



$$\Rightarrow \begin{aligned} N_x &= 0, & N_y &= N \\ f_x &= f, & f_y &= 0 \\ G_x &= mg \sin \theta, & G_y &= mg \cos \theta \end{aligned}$$

- Bruk N1 og/eller N2 og løs ligningene

N1 $\perp$ skråplanet: $N = mg \cos \theta$

N2 $\parallel$ — " — : $mg \sin \theta - f = ma$

Statisk ($a=0$): $f = mg \sin \theta \leq f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$

Bare mulig hvis $\tan \theta \leq \mu_s$

Kinetisk: $f = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta \Rightarrow \underline{a = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}$

Måling av μ_s :

Øker θ inntil klossen begynner å gli, ved vinkelen $\theta_{\max}$;

da er $\mu_s = \tan \theta_{\max}$

Friksjon i fluider

[OS1 6.4, 14.7]

(13)



omgivende fluid (gass eller væske) med
massetetthet ρ og dynamisk viskositet μ

Luft: $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$; $\mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$

Vann: $\rho = 1000$; $\mu = 10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$

Liten $v \Rightarrow$ Pen, lagdelt (laminær) strømming av fluidet
rundt legemet, og $\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$. Kule, radius r : $k = 6\pi\mu r$
(Stokes' Lov)

Stor $v \Rightarrow$ Uordnet (turbulent) strømming av fluidet, og

$$\vec{f} = -\frac{1}{2} \rho A C_d v^2 \hat{v}; \text{ her er}$$

C_d = drag-koeffisienten, stort sett bestemt av legemets form

A = legemets tverrsnitt $\perp \vec{v}$

Kule, radius r : $A = \pi r^2$, $C_d \approx 0.5$

Eks [TFY4125 17/8-24]: To like store kompakte kuler,
en av aluminium (2.70 g/cm^3) og en av jern (7.86 g/cm^3),
faller mot bakken med konstante hastigheter, såkalt
terminalfart v_t . Anta turbulente forhold og beregn $v_t(\text{Fe})/v_t(\text{Al})$

Løsn: N1 gir $f = mg$, med $f = \alpha \cdot v_t^2$ ($\alpha = \rho_{\text{luft}} A C_d / 2$)
og $m = \rho_{\text{metall}} V$. Dermed: $v_t^2 = \rho_{\text{metall}} V g / \alpha$, dvs

$$\begin{aligned} v_t(\text{Fe})/v_t(\text{Al}) &= \sqrt{\rho(\text{Fe})/\rho(\text{Al})} \\ &= \sqrt{7.86/2.70} \\ &= \underline{\underline{1.71}} \end{aligned}$$

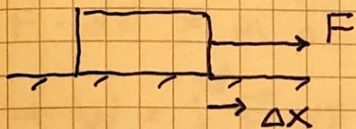
Arbeid og energi

[OS1 7, 8]

(14)

Arbeid [OS1 7.1]

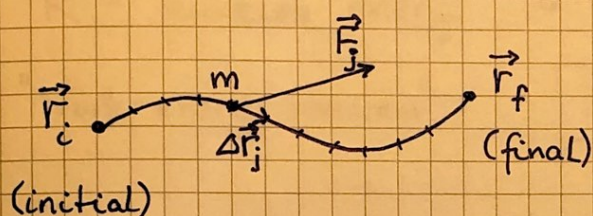
arbeid $\stackrel{\text{def}}{=}$ kraft $\cdot$ forflytning



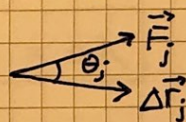
$$\Delta W = F \cdot \Delta x = \text{arbeid utført av } F \text{ på klossen}$$

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \text{ (joule)}$$

Generelt:



$$\Delta W_j = \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j = F_j \Delta r_j \cos \theta_j$$



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ på massen m når m flytter seg fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$

Effekt [OS1 7.4]

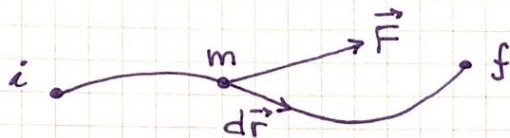
effekt $\stackrel{\text{def}}{=}$ utført arbeid (overført energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = \text{J/s} = \text{W} \text{ (watt)}$$

Kinetisk energi [os1 7.2]

(15)



$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \cdot \frac{1}{2} d(v^2)$$

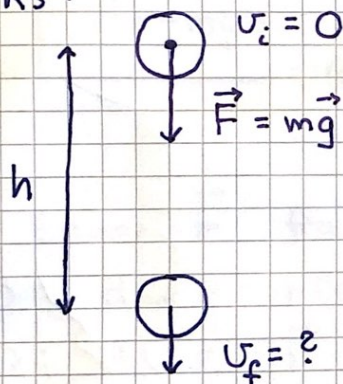
$$\Rightarrow W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m \int_i^f d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K = \text{kinetisk energi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$$

"Work-energy theorem":

$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

Eks:



Løsn:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot h = mgh$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_f^2$$

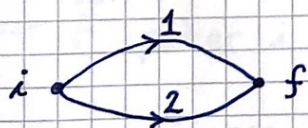
$$\Rightarrow \underline{v_f = \sqrt{2gh}}$$

Konservative krefter. Potensiell energi [os1 8.1-8.4]

$\vec{F}$ er konservativ hvis

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

↑ integral rundt lukket bane



$$W_1 - W_2 = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Dvs: Arbeidet utført av konservative krefter er uavhengig av veien fra i til f

Forskjellen i potensiell energi U :

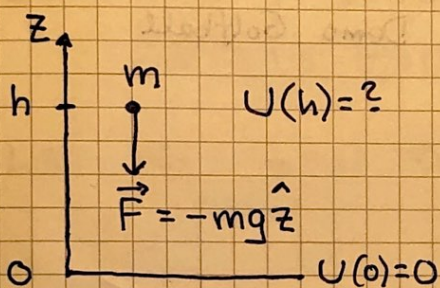
(16)

$$\Delta U = U_f - U_i \stackrel{\text{def}}{=} - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{når } \vec{F} \text{ er konservativ})$$

Vi velger fr tt hvor $U=0$; bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning. Anta $U(\vec{r}_0) = 0$:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Eks: Masse i tyngdefeltet



$$\begin{aligned} U(h) &= - \int_0^h F dz \\ &= - \int_0^h (-mg) dz \\ &= \underline{\underline{mgh}} \end{aligned}$$

Vi finner $\vec{F}$ fra U ved derivasjon:

$$1D: dU = -F(x)dx \Rightarrow F(x) = -dU/dx$$

$$3D: dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$

Gradient til U :

$$\nabla U = \left\{ \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right\} U = \text{vektor i retningen som } U \text{ øker raskest}$$

$\Rightarrow \vec{F}$ peker i retningen som U avtar raskest

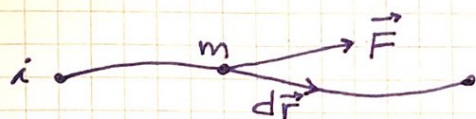
Eks: Masse i tyngdefeltet, $U(z) = mgz$, beregn $\vec{F}$

$$\text{L sn: } \partial U / \partial x = \partial U / \partial y = 0; \quad \partial U / \partial z = mg$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -mg\hat{z}; \quad \text{OK}$$

Energibevarelse [OS1 8.3]

(17)



(konservativ $\vec{F}$)

$$\left. \begin{aligned} \Delta K &= K_f - K_i = W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \Delta U &= U_f - U_i = - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$
$$\Rightarrow \Delta(K+U) = \Delta E = 0$$

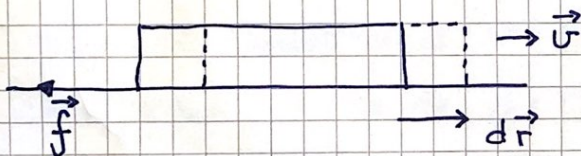
Total mekanisk energi $E = K + U$ er bevart i et kons. system

Eks: Masse m slippes i tyngdefeltet.

Anta $z_i = h$, $u_i = 0$, $z_f = 0$ og beregn u_f

Løsn: $K_i = U_f = 0 \Rightarrow K_f = U_i \Rightarrow \frac{1}{2} m u_f^2 = mgh \Rightarrow \underline{u_f = \sqrt{2gh}}$; ok

Friksjonsarbeid [OS1 7.1]



Kinetisk friksjon gir $dW_f = \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ fordi $\vec{f}$ og $d\vec{r}$ har motsatt retning. Da er $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ og $\vec{f}$ er ikke konservativ. Mekanisk energi omdannes til varme, lydenergi etc.

Statisk friksjon gir ikke tap av mekanisk energi fordi relativ forflytning er $d\vec{r} = 0$.

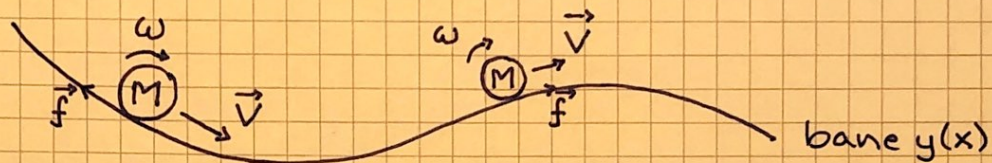
Eks: Hvor langt glir klossen hvis $\mu_k = 0.26$ og $u_0 = 10 \text{ m/s}$?

Løsn: $W_f = \mu_k N \cdot s = \mu_k mgs$; $K_0 = \frac{1}{2} m u_0^2$

$$\Rightarrow s = u_0^2 / 2\mu_k g \approx 100/5 \text{ m} = \underline{20 \text{ m}}$$

Labprosjektet: Kule på berg-og-dal-bane

(18)



Kula ruller uten å gli $\Rightarrow$ statisk friksjon $\vec{f}$

$\Rightarrow$ mekanisk energi er bevart

Pot. energi: $U = Mgy$

Translasjonsenergi: $K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} MV^2$

Rotasjonsenergi: $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$

Tregghetsmoment for kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Rullebetingelsen: $\omega = V/R$

$\Rightarrow K_{\text{rot}} = \frac{1}{5} MV^2$

Total kinetisk energi: $K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{7}{10} MV^2$

Dermed, med fart $V=0$ i høyde y , blir farten til kula i høyde $y=0$

$$V = \sqrt{\frac{10}{7} gy}$$