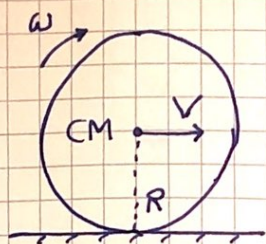


Ren rulling [OS1 11.1]

(24)

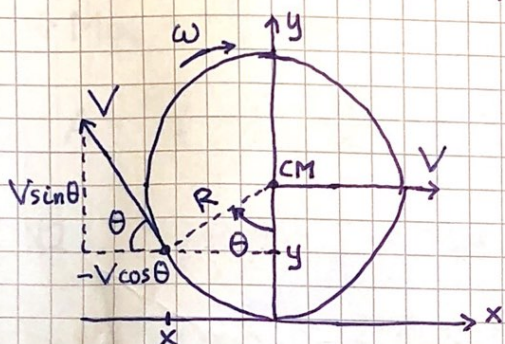


For en helomdreining: $V = \frac{2\pi R}{T}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\Rightarrow \underline{V = \omega R} \quad \text{Rullebetingelsen}$$

$$\Rightarrow \underline{K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} cMR^2 \frac{V^2}{R^2} = \frac{1}{2} (1+c) MV^2}$$

Banen til et punkt på periferien:

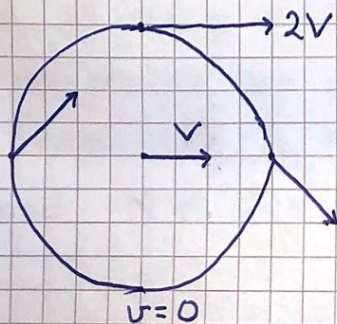
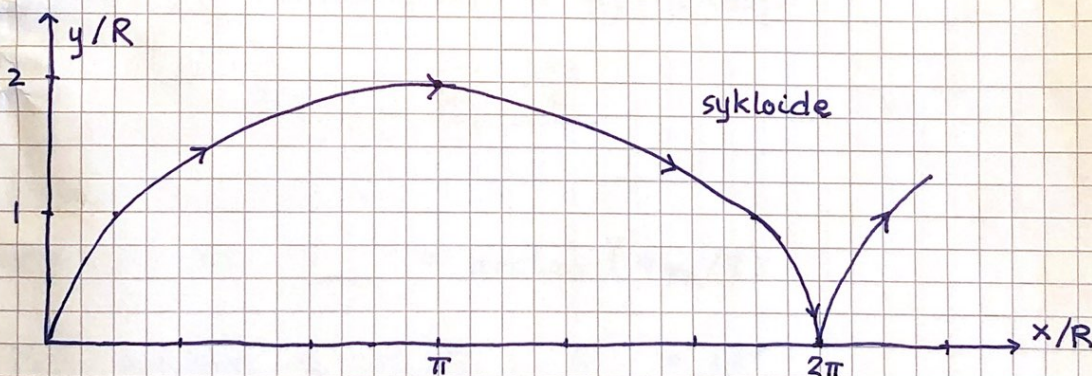


$$\omega = \dot{\theta} = V/R \Rightarrow V = R\dot{\theta}$$

$$\text{Fra fig.: } v_x = V - V \cos \theta$$

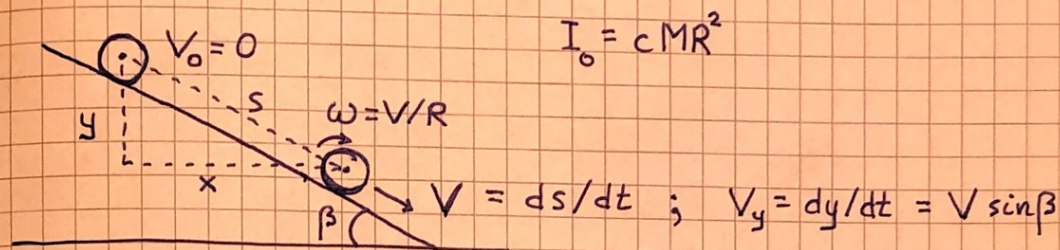
$$v_y = V \sin \theta$$

$$\text{Banen: } x(\theta) = R \cdot \theta - R \cdot \sin \theta \quad ; \quad y(\theta) = R - R \cos \theta$$



Punktet med bakkekontakt er i ro ; hjulet glir ikke.

Ren rulling på skråplan:



Bestem V , A , f og max β som gir ren rulling.

Løsning: Statisk friksjon gir at mek. energi er bevart.

$$\Rightarrow Mgy = \frac{1+c}{2} MV^2 \Rightarrow V(y) = \sqrt{\frac{2gy}{1+c}} \Rightarrow \text{Kule ruller raskest}$$

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot \sqrt{\frac{2gy}{1+c}} \sin \beta = \frac{g \sin \beta}{1+c}$$

$$N2: Mg \sin \beta - f = MA \Rightarrow f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta$$

$$\text{Fra før: } f \leq \mu_s N ; \quad N = Mg \cos \beta$$

$$\Rightarrow \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta \leq \mu_s Mg \cos \beta$$

$$\Rightarrow \tan \beta \leq \mu_s \cdot \frac{1+c}{c}$$

Kule:

$$c = 2/5 \Rightarrow \beta_{\max} = \arctan(7\mu_s/2)$$

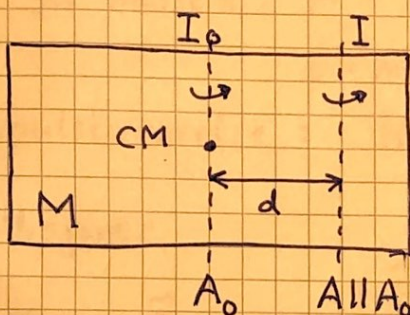
$$\text{Med (f.eks) } \mu_s = 0.25 : \beta_{\max} = 41^\circ$$

Rulling på berg-og-dal-bane:

Mye det samme som på skråplan, men pga at banen er krum blir $A_\perp \neq 0$ (sentrifetalaks.), og dermed $N \neq Mg \cos \beta$.

Steiners sats [OS1 10.5]

(26)

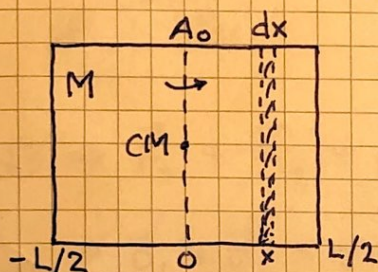


Da er:

$$I = I_0 + Md^2$$

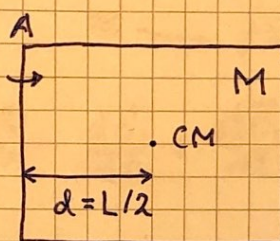
[Se notat for bevis]

Eks 1: Svingdør og sidehengslet dør



$$g = x; dm = M dx / L$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 M dx / L = \frac{1}{12} ML^2$$



$$I = I_0 + Md^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Eventuelt:

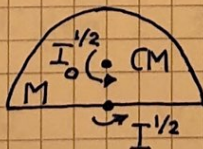
$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \frac{1}{3} ML^2 \quad \text{OK!}$$

Eks 2: [TFY 4125 21/5 - 24]

Kompakt halvkule; I_0 mhp akse gjennom halvkulas CM? (M, R)

$$\text{Oppgitt: } I_0^{\text{HEL}} = \frac{2}{5} \cdot 2M \cdot R^2; \quad Y_{\text{CM}}^{\text{HALV}} = 3R/8$$

Løsn 2:



$$I^{1/2} = \frac{1}{2} I_0^{\text{HEL}} = \frac{2}{5} MR^2$$

$$\begin{aligned} \text{Steiners sats} \Rightarrow I_0^{1/2} &= I^{1/2} - M \cdot (3R/8)^2 \\ &= \left(\frac{2}{5} - \frac{9}{64}\right) MR^2 = \underline{\underline{0.26 MR^2}} \end{aligned}$$

Impuls. Kollisjoner. Rakettprinsipp [osi 9]

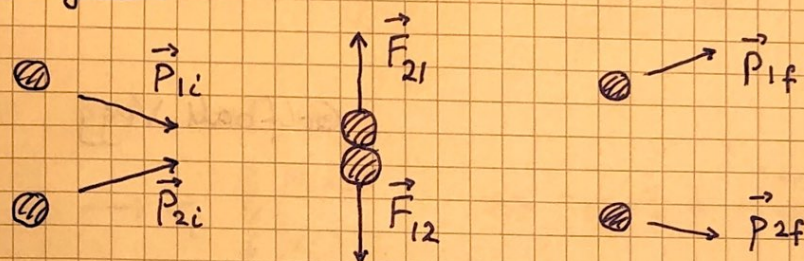
(27)

N2 for masse m : $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$\vec{p} = m\vec{v} = \text{massens impuls}$; $[p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$

Impulsbevarelse: Hvis $\vec{F} = 0$, er $\vec{p}$ bevart

Kollisjoner



N3 $\Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0 \quad \xRightarrow{N2} \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$

$\Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konstant}$, når ytre krefter kan neglisjeres i den typisk kortvarige kollisjonen

Mekanisk energi E kan gå tapt pga friksjon og deformasjon

- Elastisk støt: $\Delta E = 0$
- Uelastisk "": $\Delta E < 0$. Hvis legemene henger sammen etter kollisjonen, med felles slutfart, kalles det et fullstendig uelastisk støt. Da er $|\Delta E|$ maksimal.

Sentralt støt: Kollisjon i 1D

Før: $m \rightarrow u_i \quad V_i \leftarrow M$

Etter: $u_f \leftarrow m \quad M \rightarrow V_f$

- ← +

$\Delta p = 0$: $mu_i + MV_i = mu_f + MV_f \quad (1)$

Hvis fullstendig uelastisk: $u_f = V_f = (mu_i + MV_i)/(m+M)$

Elastisk støt: $\frac{1}{2} m u_i^2 + \frac{1}{2} M V_i^2 = \frac{1}{2} m u_f^2 + \frac{1}{2} M V_f^2$ (2) (28)

Lign. (1) og (2) Løst mhp slutt hastighetene:

$$u_f = \frac{M}{m+M} \left(2V_i + u_i \cdot \frac{m-M}{M} \right) ; V_f = \frac{m}{M+m} \left(2u_i + V_i \cdot \frac{M-m}{m} \right)$$

Eks1: $M=m$, $V_i=0$. Da blir $u_f = 0$ og $V_f = u_i$.

$$m \otimes \rightarrow u_i \quad \otimes m \quad V_i=0 \Rightarrow m \otimes \quad \otimes \rightarrow u_i \quad u_f=0$$

Eks2: Ball mot vegg

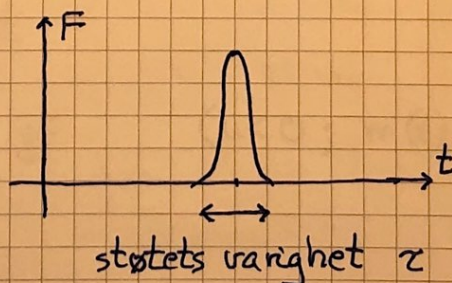
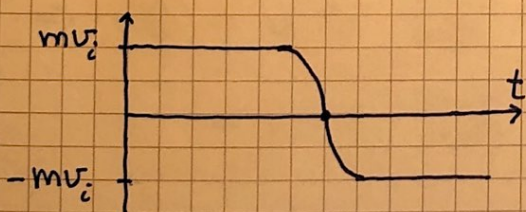
$$m \otimes \rightarrow u_i \quad \left\{ \begin{array}{l} M=\infty \\ V_i=0 \end{array} \right. \Rightarrow u_f=? \leftarrow m \quad \left\{ \begin{array}{l} M \\ V_f=? \end{array} \right.$$

$$u_f = \frac{M}{m+M} \cdot u_i \cdot \frac{m-M}{M} \approx -u_i ; V_f = \frac{2m u_i}{M+m} \approx 0$$

Impulsbevarelse: $m u_i = m u_f + M V_f = -m u_i + \frac{2m M u_i}{M+m} = m u_i ; \text{OK}$

Kraftstøt (eng: impulse): F fra vegg endrer ballens impuls

$$F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow dp = F dt \Rightarrow \Delta p = \int dp = \int F(t) dt$$



Estimat av midlere akselerasjon i støtet:

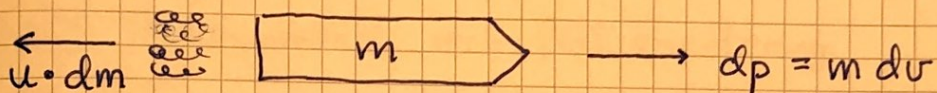
$$u_i \approx 10 \text{ m/s}, u_f \approx -10 \text{ m/s}, \tau \approx 2 \text{ ms}$$

$$\Rightarrow \langle a \rangle = \frac{20 \text{ m/s}}{0.002 \text{ s}} = 10^4 \text{ m/s}^2 \gg g ; \text{dus OK \AA}$$

neglisjere ytre krefter (mg) i kollisjons- "øyeblikket"

Rakettprinsipp

(29)



Forbrent drivstoff, dm pr tidsenhet, sendes bakover med fart u . Pga impulsbevarelse øker rakettenes fart:

$$m \cdot dv = u \cdot dm$$

$$\text{N2 for raketten: } m \cdot \frac{dv}{dt} = u \cdot \frac{dm}{dt} = F_{\text{skyr}}$$

$$\text{Skyrkraft: } F_{\text{skyr}} = u \cdot \dot{m}$$

Ved oppskyting i tyngdefeltet: $F = u\dot{m} - mg$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} - mg$$

La oss beregne $v(t)$. Antar $v(0)=0$ og konstante u og g .

Multipliser lign. med dt/m og integrer fra 0 til t :

$$\int_0^{v(t)} dv = u \int_{m(0)}^{m(t)} \frac{dm}{m} - g \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow v(t) = u \ln \frac{m(t)}{m(0)} - gt$$

$$= |u| \ln \frac{m(0)}{m(t)} - gt \quad (u < 0; m(t) < m(0))$$

Eks [TFY4125 21/5-24]:

$m_0 = m(0) = 3.04 \cdot 10^6$ kg; $|u| = 2.58$ km/s; ønsker $a = 0.20g$ ved takeoff. Hva er påkrevd $|\dot{m}|$?

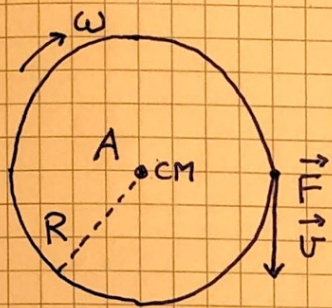
$$\begin{aligned} \text{Løsn: } |\dot{m}| &= m_0(a+g)/|u| = [3.04 \cdot 10^6 \cdot 1.20 \cdot 9.81 / 2580] \text{ kg/s} \\ &= \underline{\underline{1.39 \cdot 10^4 \text{ kg/s}}} \end{aligned}$$

Rotasjonsdynamikk

[051 10]

(30)

Først: Rotasjonsakse med fast orientering.



$$\text{Tilført effekt: } P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv = FR\omega$$

$$\text{Kraftens dreiemoment: } \tau = F \cdot R$$

$$\Rightarrow P = \tau \cdot \omega$$

Alternativt:

$$P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_0 \omega^2 \right) = I_0 \omega \frac{d\omega}{dt}$$

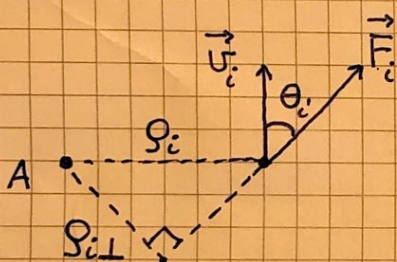
Dermed:

$$\tau = I_0 \dot{\omega}$$

N2 for rotasjon om akse med fast orientering (her gjennom CM)

På samme form som $F = m\dot{v}$!

Generalisering:



$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_i v_i \cos \theta_i$$

$$= \sum_i F_i r_i \omega \cos \theta_i = \tau \cdot \omega$$

$$\text{med } \tau = \sum_i F_i r_{i\perp} \cos \theta_i = \sum_i F_i r_{i\perp} = \text{netto ytre dreiemoment mhp rot.aksen A}$$

$r_{i\perp}$ = avstanden fra rot.aksen til kraftens forlengelseslinje = kraftens arm

Ved å sammenholde

$$P = dW/dt \quad \text{og} \quad P = \tau \omega = \tau d\phi/dt$$

ser vi at $dW = \tau d\phi$ er arbeidet utført av τ når omløpt vinkel er $d\phi$. På samme form som $dW = F \cdot dx$!