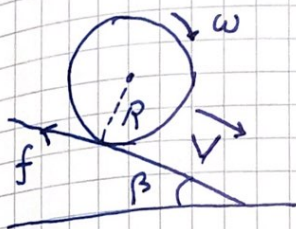


Eks 1: Ren rulling på skråplan

(31)



$$I_o = cMR^2, \quad \omega = V/R, \quad \dot{\omega} = \dot{V}/R$$

$$F_{||} = Mg \sin \beta - f \stackrel{N2}{=} M\dot{V}$$

$$N2, \text{ rotasjon om CM: } \tau = I_o \dot{\omega}$$

Bare $\vec{f}$ har en arm mhp aksen gjennom CM;

$\vec{N}$ og $M\vec{g}$ passerer gjennom CM. $\Rightarrow \tau = f \cdot R$

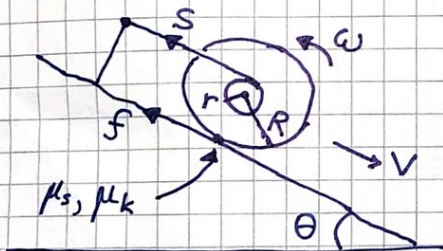
$$\Rightarrow f \cdot R = cMR^2 \cdot \dot{V}/R \Rightarrow f = cM\dot{V}; \text{ settes inn i N2:}$$

$$Mg \sin \beta - cM\dot{V} = M\dot{V} \Rightarrow \dot{V} = \frac{g \sin \beta}{1+c}; \quad f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta$$

Som med energibevarelse s. 25.

Eks 2: Snelle baklengs på skråplan

(Øving 6)



- Ved hvilken vinkel θ_0 begynner snella å rotere baklengs og gli nedover skråplanet?

Tips: N1 $\perp$ skråplanet og N1 rot. om CM;

$$f = \mu_s \cdot N \quad \text{når } \theta = \theta_0$$

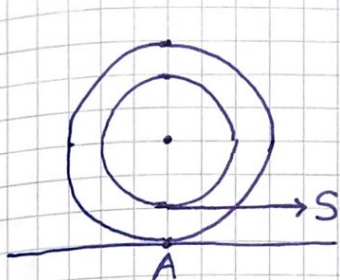
- Hva er S og $\dot{V}$ når $\theta > \theta_0$?

Tips: N2 $\perp$ skråplanet og N2 rot. om CM; $f = \mu_k \cdot N$

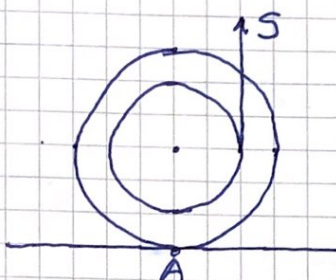
Merk: Translasjon $2\pi r$ og rotasjon 2π tar like lang tid $\Rightarrow V = \omega \cdot r$

Eks 3: Hvilken vei ruller snella?

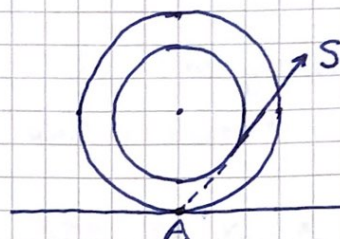
(32)



Høyre



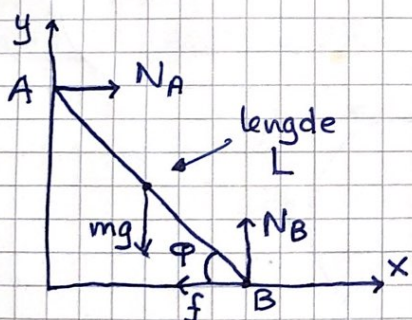
Venstre



I ro

Velger kontaktlinjen A mellom snelle og underlag som (rotasjons-)akse. Tyngdekraften Mg , normalkraften N og friksjonskraften f har alle null arm mhp akse A, bare snordraget S kan ha en arm $\neq 0$ mhp A. Forlengelse av $\vec{S}$ relativt A avgjør om snella ruller mot høyre eller venstre, evt. blir liggende i ro.

Eks 4: Vil stigen gli?



Anta statisk friksjonskoeff. μ i B, men null friksjon i A. Da vil stigen begynne å gli dersom

$$f = f_{\max} = \mu N_B$$

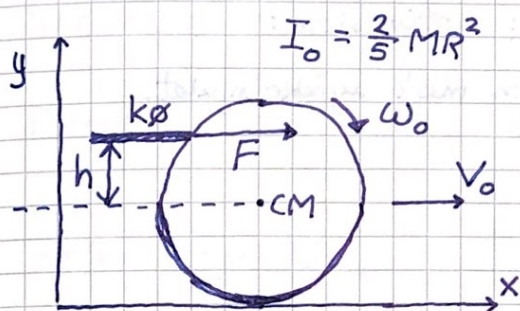
Stigen i ro, statisk likevekt, når $\sum F_x = \sum F_y = 0$ og $\sum \tau_B = 0$, dvs vi velger (f.eks.) akse i B, $\perp$ xy-planet:

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_x = 0 : f = N_A \\ \sum F_y = 0 : N_B = mg \end{array} \right\} \text{Kombinert med } f = \mu N_B \text{ får vi}$$

$$N_A = \mu N_B = \mu mg$$

$$\sum \tau_B = 0 : mg \frac{L}{2} \cos \varphi = N_A L \sin \varphi = \mu mg L \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \underline{\tan \varphi_{\min} = 1/2\mu}$$



- Bestem $h = h_0$ som gir ren rulling umiddelbart.
- Diskuter $h > h_0$ og $h < h_0$.

Vi antar støt med kort varighet Δt og stor kraft F , slik at friksjon (fra underlaget) kan neglisjeres i selve støtet.

$$N2: F = \Delta p / \Delta t \Rightarrow F \cdot \Delta t = M \cdot V_0 \quad (1)$$

$$N2 \text{ rot. om CM: } \tau = I_0 \Delta \omega / \Delta t \Rightarrow F h \Delta t = I_0 \omega_0 = \frac{2}{5} MR^2 \omega_0 \quad (3)$$

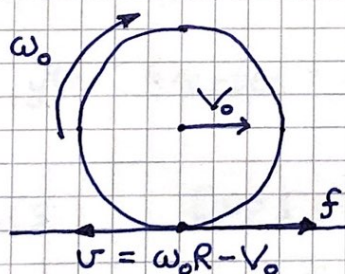
$$\text{Ren rulling: } \omega_0 = V_0 / R \Rightarrow F h_0 \Delta t = \frac{2}{5} MR V_0 \quad (2)$$

$$(2) \text{ dividert med } (1) \text{ gir: } \underline{h_0 = 2R/5}$$

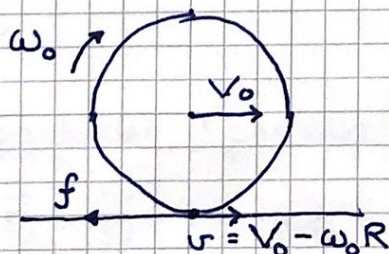
Hvis $h \neq h_0$: (3) dividert med (1) gir:

$$h = \frac{2}{5} \omega_0 R^2 / V_0 \Rightarrow \omega_0 = (h/h_0) \cdot V_0 / R$$

$h > h_0$: $\omega_0 > V_0 / R$, "toppspinn":



$h < h_0$: $\omega_0 < V_0 / R$, "underskru":



Kula glir i starten ("sluring"), men pga friksjonen f , og dens dreiemoment

$$\tau_f = (\pm) f \cdot R$$

vil ω og V/R nærme seg hverandre og etter hvert gi ren rulling.

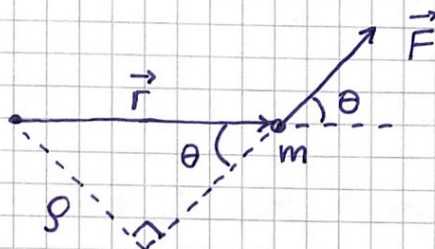
Rotasjonsdynamikk med vektorer

(34)

Nødvendig når rotasjonsaksen ikke har fast orientering.

Dreiemoment [OS1 10.6]

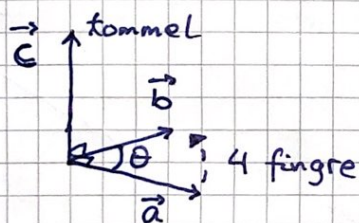
Referansepunkt
(Typisk origo)



$\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F}$ = kraftens dreiemoment, relativt origo

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{r}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{F}$

Høyrehåndsregel (HHR) for kryssprodukt:



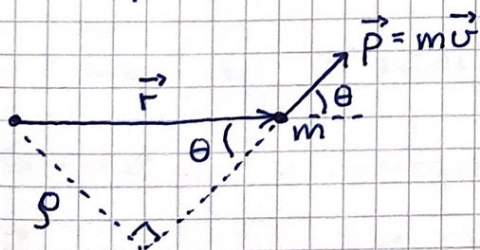
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Absoluttverdi: $\tau = r F \sin \theta = g F$

g = kraftens arm (som før)

Hvis flere ytre krefter: $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Dreieimpuls [OS1 11.2]



$$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p}$$

= massens dreieimpuls

$$\vec{L} \perp \vec{r} \text{ og } \vec{L} \perp \vec{p}$$

$$L = r p \sin \theta = g p$$

Hvis flere partikler (partikkelsystem):

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad \text{evt.} \quad \vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm$$

N2 for rotasjon [OS1 11.2]

(35)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \quad \left(\text{da } \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \quad \text{Jf. } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{På samme form.}$$

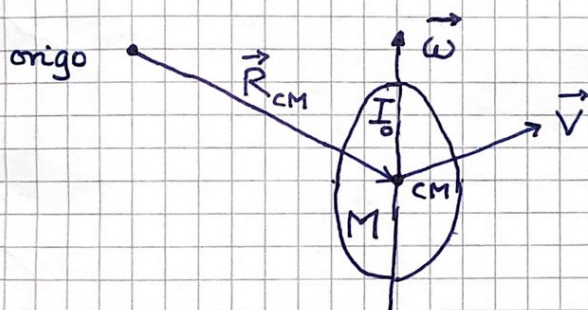
Bevaringslov: $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ er bevart

Betingelser for statisk likevekt (dvs $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$):

$$\vec{\tau} = 0 \quad \text{og} \quad \vec{F} = 0$$

$\vec{L}$ for stivt legeme [OS1 11.2]

Antar noenlunde symmetrisk legeme, dvs uendret etter rotasjon 180° om rotasjonsaksen.



$$\vec{L}_b = \vec{R}_{cm} \times M\vec{V} = \text{banedreieimpuls}$$

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} = \text{indre dreieimpuls (spinn)}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \text{total dreieimpuls}$$

[Se notat for utledninger]

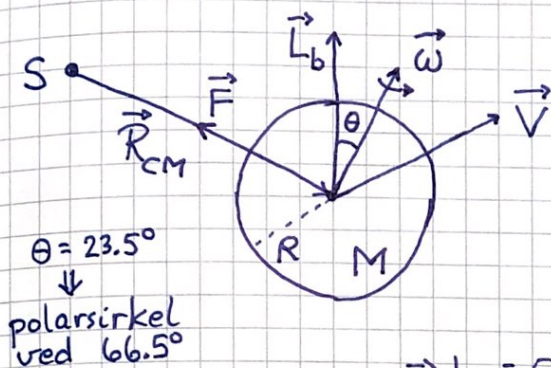
• $\vec{L}_b$ avhenger av ref.punktet; det gjør ikke $\vec{L}_s$

• Hvis ref.punkt i CM: $V=0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$

Og hvis akse med fast orientering: $\tau = I_0 \dot{\omega}$, som før (s.30)

Eks 1: L_s og L_b for jorda relativt sola

(36)



$$L_s = I_o \omega ; I_o \approx \frac{1}{3} MR^2 ; \omega = \frac{2\pi}{T_\omega}$$

$$L_b = R_{cm} M V ; V = R_{cm} \Omega ; \Omega = \frac{2\pi}{T_\Omega}$$

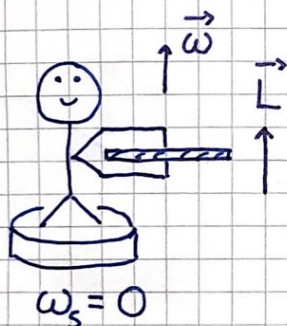
$$M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}, R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$R_{cm} = 1.49 \cdot 10^{11} \text{ m}, T_\omega = 24 \text{ h}, T_\Omega = 365 \text{ d}$$

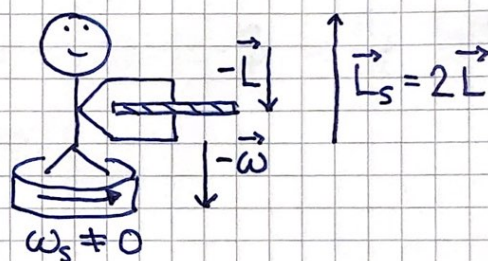
$$\Rightarrow L_s = 5.9 \cdot 10^{33} \text{ Js} ; L_b = 2.6 \cdot 10^{40} \text{ Js} (\Rightarrow L \approx L_b)$$

$$\vec{\tau} = \vec{R}_{cm} \times \vec{F} = 0 \text{ da } \vec{F} \parallel \vec{R}_{cm} \Rightarrow \vec{L} \text{ er bevart}$$

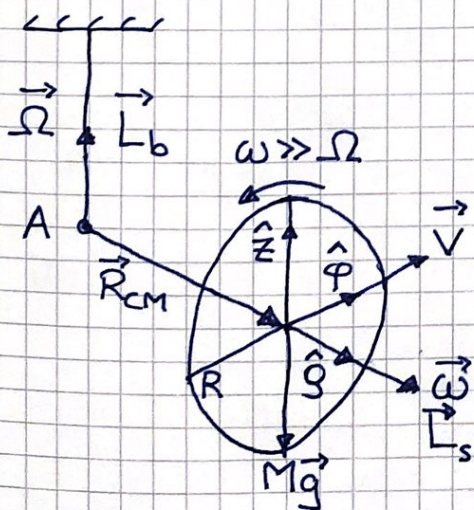
Eks 2: Dreieimpulsbevarelse for student med hjul som spinner



Hjulets snus
 $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{L} = 0$



Eks 3: Presesjon [OS1 11.4]



$$I_o \approx MR^2$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}$$

$$R_{cm} \approx 0.2 \text{ m}$$

$$T_\Omega = 2\pi/\Omega \approx 5 \text{ s}$$

$$\text{Beregn } T_\omega = 2\pi/\omega$$

$$N2, \text{ rot. om A: } \vec{\tau} = \dot{\vec{L}}; \quad \vec{\tau} = \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} = R_{cm} Mg \hat{\phi} \quad (37)$$

$$\vec{L} = \vec{L}_s + \vec{L}_b$$

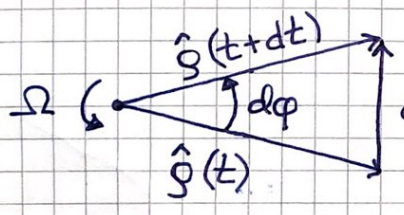
$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} = MR^2 \omega \hat{g}$$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{cm} \times M\vec{V} = R_{cm}^2 M \Omega \hat{z}$$

$$\omega \gg \Omega \Rightarrow L_s \gg L_b \Rightarrow \vec{L} \approx \vec{L}_s$$

$$\text{Innsatt i N2, rot. om A: } R_{cm} Mg \hat{\phi} = MR^2 \omega \frac{d\hat{g}}{dt}$$

Hjulets aksling, og dermed $\hat{g}$, roterer om z-aksen med vinkel-fart Ω :



$$d\hat{g} = 1 \cdot d\phi \cdot \hat{\phi} = \Omega dt \cdot \hat{\phi} \Rightarrow \frac{d\hat{g}}{dt} = \Omega \hat{\phi}$$

↑ lengden av $\hat{g}$

Dermed:

$$R_{cm} Mg = MR^2 \omega \Omega$$

Setter inn $\omega = 2\pi/T_\omega$ og $\Omega = 2\pi/T_\Omega$ og løser mhp T_ω :

$$T_\omega = \frac{(2\pi R)^2}{R_{cm} g T_\Omega} \approx \frac{(2 \cdot 1 \text{ m})^2}{0.2 \text{ m} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ s}} = \underline{\underline{0.4 \text{ s}}}$$

Dvs, $f_\omega = 1/T_\omega \approx 2.5$ omdreininger pr sek.

(= 150 rpm, revolutions per minute)