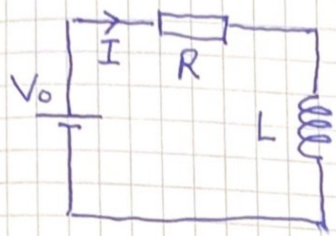
Avsluttende eksempler [OS2 14, 15]

Eks 1: RL-krets

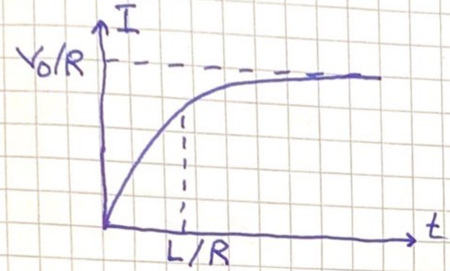


V_0 kobles til ved $t=0$

K2: $V_0 - RI - L\,dI/dt = 0$

Samme lign. for $I(t)$ som for $Q(t)$ i RC-kretsen (s 74)

$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ med tidskonstant $\tau = L/R$



Pga indusert motspenning i spolen tar det en viss tid før vi oppnår maks. strøm V_0/R.

Eks 2: Vannkraft og vekselspenning

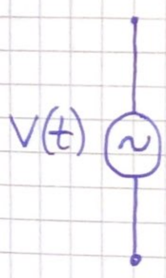
Rennende vann (evt vind) driver en turbin som roterer en spole med N viklinger og tverrsnitt A i et $\vec{B}$-felt, med vinkelfart ω. Gir tidsavhengig omsluttet fluks

$$\phi(t) = NBA\cos\omega t$$

og dermed indusert vekselspenning (AC: alternating current)

$$V(t) = V_0 \sin\omega t \quad ; \quad V_0 = NBA\omega$$

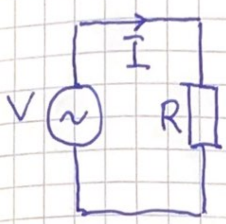
Kretssymbol:



Frekvens: $f = \omega/2\pi$

Europa: $f = 50$ Hz

Eks 3: Effektivverdier



K2: $V_0 \sin \omega t - RI = 0$

$\Rightarrow I(t) = I_0 \sin \omega t \quad ; \quad I_0 = V_0 / R$

Effekttap: $P(t) = V(t) I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$

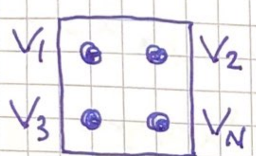
Midlere effekttap: $\langle P \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0$ da $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$

Uttrykker $\langle P \rangle$ ved effektivverdier / rms-verdier:

$\langle P \rangle = V_{rms} I_{rms} \quad ; \quad V_{rms} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad ; \quad I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

Kontakten i veggen: $V_{rms} = 230\,V \Rightarrow V_0 = 325\,V$

Eks 4: 3-fase og 400 V



$V_1 = V_0 \sin \omega t$

$V_2 = V_0 \sin(\omega t + 2\pi/3)$

$V_3 = V_0 \sin(\omega t + 4\pi/3)$

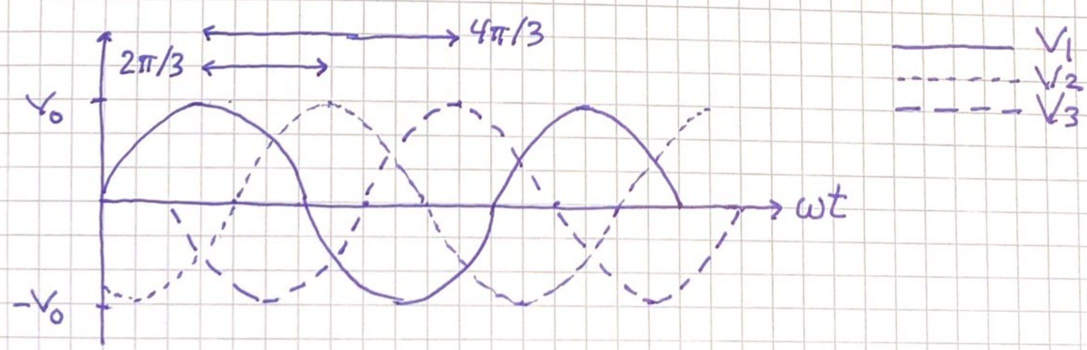
$V_N = 0$ ("nøytral-leder")

Siden $\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ har vi

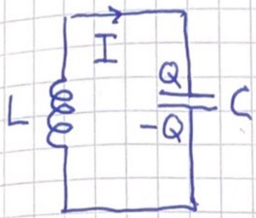
$V_{21} = V_2 - V_1 = 2 V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\, V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow (V_{21})_{rms} = \frac{\sqrt{3}\, V_0}{\sqrt{2}} = 400\,V$ når $V_0 = 325\,V$

Tilsvarende for V_{32} og V_{31}.



Eks 5: LC-krets og mekanisk analogi



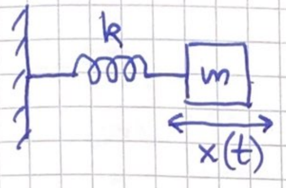
$K2: \; -L\dot{I} - Q/C = 0 \quad ; \quad I = \dot{Q}$

$\Rightarrow \quad \ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

Med $Q = Q_0$ og $I = 0$ ved $t = 0$ blir da:

$Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t \; ; \; I(t) = -\omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t$

Mek. analogi:



$N2: \; -kx = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Med $x = x_0$ og $v = 0$ ved $t = 0$:

$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t \; ; \; v(t) = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t$

Analoge størrelser i de to systemene:

$Q \leftrightarrow x, \quad I \leftrightarrow \dot{x}, \quad L \leftrightarrow m, \quad C \leftrightarrow 1/k$

$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2} L I^2$ = energi i $\vec{B}$-feltet i spolen

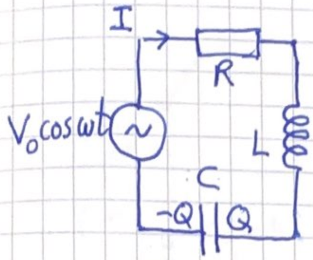
$U = \frac{1}{2} k x^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2} Q^2/C$ = —"— $\vec{E}$-feltet i kondensatoren

Begge systemer er konservative, uten tap (dissipasjon) av energi:

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} L \underbrace{\omega_0^2}_{=\frac{1}{LC}} Q_0^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$= \frac{Q_0^2}{2C} = \text{konstant}$$

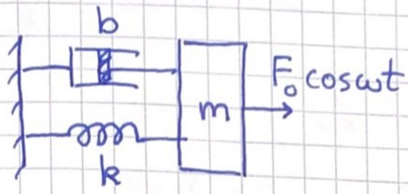
Eks 6: RLC resonanskrets



$$K2: \; V_0 \cos\omega t - R\dot{Q} - L\ddot{Q} - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C} Q = V_0 \cos\omega t$$

Mek. analogi: (5.42–44)



$$N2: \; F_0 \cos\omega t - b\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t$$

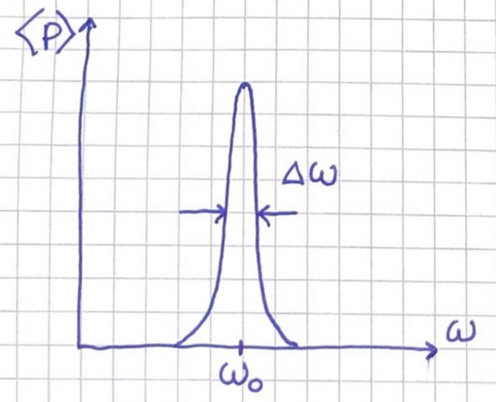
Analoge størrelser: $b \leftrightarrow R$, $F_0 \leftrightarrow V_0$

Må få $Q(t)$ i el. krets på samme form som $x(t)$ i mek. system:

$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi) \;; \quad Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\}^{1/2}} \;; 2\gamma = \frac{R}{L}$$

$$\Rightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = I_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi) \;; \quad I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$$

$$\langle P \rangle(\omega) = \langle V(t) I(t) \rangle \;;$$ På resonans $(\omega = \omega_0)$: $\langle P \rangle = \dfrac{V_0^2}{2R}$



Halvverdibredde: $\Delta\omega = 2\gamma = R/L$ (FWHM)

Oscillatorens Q-faktor (kvalitetsfaktor):

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$