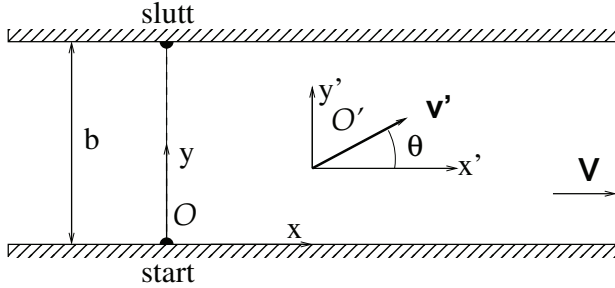


TFY4104/TFY4125 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Ekstra 1.

E1.



a. Legger inn et koordinatsystem med x langs elvebredden og y på tvers. I figuren til venstre er referansesystemet fast i elvebredden betegnet O , mens referansesystemet som følger elvestrømmen er betegnet O' .

Vannets hastighet $\mathbf{V} = V\hat{x}$ er gitt i system O . Båtens hastighet i system O' er som oppgitt

$$\mathbf{v}' = v'_x\hat{x} + v'_y\hat{y} = v'\cos\theta\hat{x} + v'\sin\theta\hat{y},$$

og båtens hastighet i system O er

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} = (v'_x + V)\hat{x} + v'_y\hat{y} = (v'\cos\theta + V)\hat{x} + v'\sin\theta\hat{y},$$

Hastighetskomponentene er altså

$$v_x = v'\cos\theta + V; \quad v_y = v'\sin\theta.$$

b. Tida det tar å ro til den andre elvebredden er gitt av y -hastigheten: $t_r = \frac{b}{v_y} = \frac{b}{v'\sin\theta}$. På denne tida vil båtens forskyvning langs elvebredden være gitt av hastigheten v_x :

$$x_1 = v_x t_r = (v'\cos\theta + V) \frac{b}{v'\sin\theta}. \quad (1)$$

Tida det tar å gå tilbake til punktet rett overfor startpunktet er $t_g = x_1/v_g$, vi har da (fornuftig nok) antatt $x_1 \geq 0$, dvs båten har drevet litt med elvestrømmen, evt treffer rett på. (Dersom $x_1 < 0$ vil $t_g = -x_1/v_g$.) Til sammen blir dette

$$t(\theta) = t_r + t_g = \frac{b}{v'\sin\theta} \left[1 + \frac{v'}{v_g} \cos\theta + \frac{V}{v_g} \right]. \quad (2)$$

c. Vi minimerer totaltiden med hensyn på roretningen:

$$\begin{aligned} \frac{dt(\theta)}{d\theta} &= \frac{-b\cos\theta}{v'\sin^2\theta} [\dots] + \frac{b}{v'\sin\theta} \cdot \frac{v'(-\sin\theta)}{v_g} \\ &= -\frac{b}{v'\sin^2\theta} \cdot \left[\left(1 + \frac{V}{v_g}\right) \cos\theta + \frac{v'}{v_g} (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \right] = 0. \end{aligned}$$

Av dette følger at vinkelen som minimaliserer tida er gitt som

$$\cos\theta_{\min} = -\frac{v'/v_g}{1 + V/v_g} = -\frac{v'}{V + v_g}. \quad (3)$$

Med de oppgitte tallverdiene får en $\cos\theta_{\min} = -3/(2+5)$ som gir $\theta_{\min} = 115^\circ$. Et ikke urimelig resultat!

d. Men dersom vi setter $V = 0$, gir uttrykket $\cos\theta_{\min} = -v'/v_g$. Dette kan umulig være riktig! Dersom elva stopper opp (dersom vi rett og slett skal krysse stillestående vann) må det raskeste være å ro rett over! Altså: I dette tilfellet burde $\theta_{\min} = 90^\circ$ og $\cos\theta_{\min} = 0$. Men hvor resonnerer vi feil i pkt **b** eller **c**?

Problemet ligger i forutsetningen $x_1 > 0$. Vi ser fra lign. (1) at dette gjelder bare dersom $v' \cos \theta + V > 0$ (siden b , v' og $\sin \theta$ alle er positive). Vi forutsetter altså $\cos \theta > -(V/v')$. Minimumsverdien $\cos \theta_{\min}$ i (3) er derfor bare gyldig dersom

$$-\frac{v'}{V + v_g} > -\frac{V}{v'} \quad \Rightarrow \quad v'^2 < V(V + v_g).$$

Hva skjer så dersom denne ulikheten for de oppgitte størrelsene ikke er oppfylt? For å forstå dette må vi gå tilbake til funksjonen $t(\theta)$ og ta høyde for at dette faktisk er *to* funksjoner. Den vi allerede har funnet, (2), er korrekt dersom vi lander *nedenfor* målpunktet, slik at $x_1 > 0$. Denne funksjonen kaller vi heretter $t^+(\theta)$. Men vi trenger også $t^-(\theta)$, som svarer til at båten lander *ovenfor* det endelige målet tvers over elva. Da er som nevnt ovenfor $t_g = -x_1/v_g$ og $t^+(\theta)$ i lign. (2) blir erstattet av

$$t^-(\theta) = t_r + t_g = \frac{b}{v' \sin \theta} - \frac{x_1}{v_g} = \frac{b}{v' \sin \theta} \left[1 - \frac{v'}{v_g} \cdot \cos \theta - \frac{V}{v_g} \right]. \quad (4)$$

De to funksjonene møtes der $x_1 = 0$, dvs for vinkelen θ_s gitt av $v' \cos \theta_s + V = 0$, altså for vinkelen

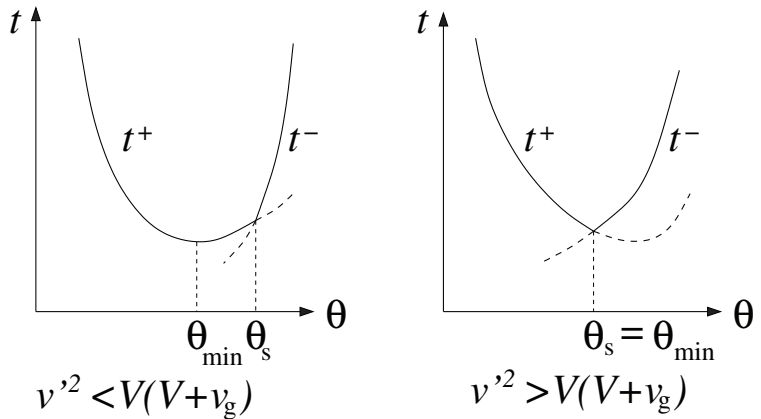
$$\cos \theta_s = -V/v'. \quad (5)$$

Skal dette ha mening, må $V < v'$. Dette har en åpenbar fysisk tolkning: Det er ikke mulig å havne rett over elva med en rofart som er mindre enn elvas strømningshastighet!

Figurene til høyre viser hva som skjer i de to parameterområdene.

Dersom $x_1 > 0$ og $v'^2 < V(V + v_g)$, er minimumstida gitt av minimum i funksjonen $t^+(\theta)$, med resultatet $\cos \theta_{\min} = -v'/(V + v_g)$ og $\theta_{\min} < \theta_s$. Minimum finnes på den konvensjonelle måten, ved å sette den deriverte lik null.

I parameterområdet der $v'^2 > V(V + v_g)$ er situasjonen kvalitativt annerledes. Der gir minimering av $t^+(\theta)$ et ufysikalsk resultat. Minimumstida er $t(\theta_s)$ der $t^+ = t^-$. Ingen av de to funksjonene som møtes i minimumspunktet har derivert lik null der.



Den fysikalske tolkningen av dette er at i *hele* parameterområdet $v'^2 > V(V + v_g)$ lønner det seg å ro rett over elva, direkte til målet, med vinkelen θ_s gitt av (5) mellom roretning og elvas strømmetning.

Eksemplet viser at minimering kan være en mer sammensatt prosess enn den konvensjonelle. Det gjelder å bruke hodet, og sjekke resultatene mot sunn fornuft. Om det kan være til noen trøst: Flere årskull studenter og lærere overså fullstendig det vi her har diskutert, og tok for gitt at resultatet under pkt c var *hele* svaret. Men den enkle sjekken vi foretok avslørte umiddelbart at det ikke kunne være tilfelle.