Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektromagnetisme
Vår 2009

Løsningsforslag til øving 8

Oppgave	A	B	C	D
1				x
2		x		
3			x	
4		x		
5	x			
6	x			
7	x			
8	x			
9				x
10			x	
11	x			
12		x		
13		x		
14	x			
15			x	
16				x
17				x
18			x	
19		x		
20	x			

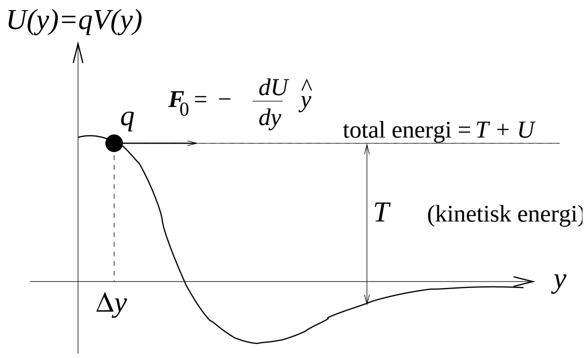
Kommentar: I denne øvingen ble det gitt endel tips i forbindelse med flere av oppgavene. Det er ikke sikkert at du får hjelp i form av lignende tips på midtsemesterprøven.

1) Her er det vel opplagt at B er en mulig løsning: Dersom $b \to 0$, har vi essensielt to punktladninger $-Q$ i $x = \pm a$, og ladningen q trekkes i retning origo. Ladningens energi vil veksle mellom potensiell og kinetisk, med minst potensiell og størst kinetisk energi i origo, og null kinetisk energi i $y = \pm \Delta y$.
I neste omgang er det vel naturlig å ta stilling til om alternativ A er en mulighet. Første tanke tilsier kanskje nei, for når q kommer veldig langt unna, ser den jo essensielt en punktladning $-2Q + Q + Q - 2Q = -2Q$, og erfarer dermed en tiltrekkende kraft, dvs i retning tilbake mot origo. Dette resonnementet ville da også ha vært riktig dersom q ble plassert med null hastighet

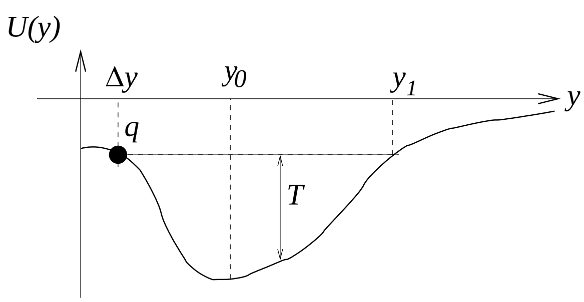
langt ute på y-aksen. Her starter imidlertid q med null hastighet i $y = \Delta y$. Hvis vi nå lar b bli riktig stor, må potensialet fra ladningene på x-aksen bli tilnærmet

$$V(\Delta y) \simeq \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Her har vi neglisjert bidraget fra de to negative punktladningene, ettersom $b \gg a$. Vi har også antatt $\Delta y \ll a$ og tilnærmet avstanden mellom q og Q med a. (Dette siste var ikke strengt tatt nødvendig, bare vi har $\Delta y \ll b$.)
Nå kommer poenget: Vi har altså $V(\Delta y) > 0$, og følgelig at potensiell energi for ladningen q, dvs $qV(\Delta y)$, er positiv. Med null starthastighet er dette også ladningens totale energi, som altså er positiv. I grensen $y \to \infty$ har vi null potensial, og følgelig null potensiell energi for ladningen q. På grunn av energibevarelse må derfor q ha *positiv kinetisk energi* for alle $y > \Delta y$, og vil forsvinne mot $y = \infty$. Følgende figur illustrerer energiforholdene til ladningen q når $b \gg a$:



Har en klart å overbevise seg om at både A og B er mulige alternativ, behøver en egentlig ikke å ta stilling til C: Riktig svar må bli D.
Fra figuren kan en vel imidlertid også innse at C må være en mulig løsning: Etterhvert som vi reduserer verdien av b, må vi til slutt nå et punkt der $V(\Delta y) = 0$. Da er total energi akkurat stor nok til at q kan forsvinne mot uendelig. En ytterligere reduksjon i b fører til at $V(\Delta y)$ blir mindre enn null, og da er total energi for liten til at q kan "unnslippe". Den vil bevege seg utover y-aksen inntil den kommer til y_1 hvor V er lik $V(\Delta y)$. Her er igjen kinetisk energi $T = 0$. Ladningen snur og vender tilbake til startpunktet, og slik vil den oscillere fram og tilbake:



Har vi friksjon, vil partikkelen tape energi (som varme til omgivelsene) og utføre oscillasjoner med stadig mindre utsving. Til slutt ender den opp i likevektsposisjonen y_0.

2) Vi har at $E = 0$ overalt inne i metallet i elektrostatisk likevekt. Det betyr, ifølge Gauss' lov, at en gaussflate S (lukket flate) som omslutter hulrommet, og som i sin helhet ligger inne i lederen, omslutter null netto ladning (q_{in}):

$$E = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{\text{in}} = \varepsilon_0 \oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

Denne gaussflaten kan legges vilkårlig nært inntil hulrommets overflate, så konklusjonen må bli at det totalt er indusert en fri ladning $-q$ på hulrommets overflate. Da blir nemlig total ladning innenfor gaussflaten lik $q - q = 0$.
Denne induserte ladningen vil fordele seg på hulrommets overflate på en slik måte at det elektriske feltet forsvinner overalt inne i lederen. Med andre ord, bidraget til feltet inne i lederen fra punktladningen q må presis kanselleres av bidraget fra den induserte ladningen $-q$. Da er det vel mer eller mindre opplagt (?) at vi må få størst indusert ladning nederst, der punktladningen ligger nært overflaten, og minst indusert ladning øverst, der punktladningen ligger lenger unna overflaten.
Da lederen har null netto ladning, må vi ha fått indusert en ladning q på lederens ytre overflate. (Husk: Ingen netto ladning inne i en leder i likevekt!) Denne ladningen vil fordele seg jevnt utover den ytre overflaten fordi "asymmetrien" forårsaket av punktladningen inne i hulrommet oppheves av den induserte ladningen $-q$ på hulrommets overflate.
På utsiden av kula "ser" vi dermed rett og slett en kulesymmetrisk overflateladning, slik at det elektriske feltet utenfor kula blir

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

der r er avstanden fra sentrum av kula.
Elektriske feltlinjer må derfor bli som i figur 2, med feltlinjer pekende utover, da $q > 0$.
Vi har valgt å tegne 8 feltlinjer pr ladning q. Alle 8 feltlinjer som starter på punktladningen må ende opp på hulrommets overflate, og slik at de står normalt på overflaten. (Elektrisk felt alltid normalt på overflaten til en elektrisk leder!) Inne i lederen er $E = 0$, så her har vi ingen feltlinjer. På den ytre overflaten har vi en ladning q jevnt fordelt utover, så her får vi igjen 8 feltlinjer, radielt rettet utover.
Kommentar: Det fulgte umiddelbart av Gauss' lov og av det faktum at $E = 0$ inne i lederen at den totale induserte ladningen blir hhv $-q$ og q på indre og ytre overflate. Men vi har vel strengt tatt ikke ført noe skikkelig argument for hvordan disse induserte overflateladningene vil *fordele seg*. En ting er sikkert: *Tilsammen* må ladningene fordele seg slik at vi får $E = 0$ overalt inne i lederen. Jeg har rett og slett *påstått* at punktladningen q og ladningen $-q$ på hulrommets overflate sørger for dette *alene*, uten "hjelp" av ladningen q på ytre overflate. Kan vi være sikre på at dette i det hele tatt er mulig? Jo: Tenk deg en gigantisk metallkule med et lite hulrom dypt inne i kula, og med en punktladning plassert i hulrommet slik som her. Nå er all ladning på ytre overflate så langt unna hulrommet at for å oppnå $E = 0$ inne i lederen i nærheten av hulrommet, må ladningen $-q$ på hulrommets overflate kansellere feltet fra punktladningen alene. Vi kan altså fastslå at det *er mulig* å oppnå $E = 0$ inne i lederen uten bruk av ladningen på ytre overflate. Men da kan vi faktisk konkludere med at dette er den *eneste* muligheten, uansett om kula er stor eller liten. Man har nemlig såkalte *entydighetsteorem* i elektrostatikken som garanterer at en *mulig* ladningsfordeling også er den *eneste* mulige. (Ikke pensum! Men se f.eks. Griffiths, kapittel 3 hvis du er interessert.)

3) Vi vet at en ladet metallkule *velger* alternativ 1, nemlig netto ladning jevnt fordelt på *overflaten*, og *ikke* jevnt fordelt utover *volumet*. Det har vi bevist ved hjelp av Gauss' lov, men det må jo samtidig være slik at dette tilsvarer lavest mulig potensiell energi. Følgelig må vi ha $U_1 < U_2$, og det er bare tilfelle i alternativ C.

Hvordan skulle vi beregne U_2? Vi kan regne ut U_1 på to måter: Først ved å finne arbeidet som skal til for å lade opp kula fra null til endelig ladning Q. Arbeidet som trengs for å øke ladningen fra q til $q + dq$ er $dW = v(q)dq$, der $v(q)$ er potensialet på kula når den har ladning q. Dermed,

$$U = \int_0^Q v(q)\, dq$$

Alternativt kan vi bruke at energien pr volumenhet i et elektrisk felt er $u = \varepsilon_0 E^2/2$, slik at

$$U = \int_{\text{hele rommet}} u\, dV = \int_{\text{hele rommet}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\, dV$$

(Se oppgave 11 i øving 9, hvor dette er gjort for U_1.)

La oss finne U_2 med begge metoder! Først tenker vi oss at vi "lager" den uniformt ladede kula ved å starte i sentrum og deretter legge til tynne kuleformede skall med ladning. Underveis i denne prosessen har vi uniform ladningstetthet innenfor en radius r, dvs total ladning $q = Qr^3/R^3$. Det elektriske feltet utenfor r er da $E(r') = q/4\pi\varepsilon_0 r'^2$, slik at potensialet v ved r er

$$v(r) = -\int_\infty^r E(r')\, dr' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Qr^3/R^3}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Arbeidet som trengs for å legge til et nytt tynt skall, med tykkelse dr og ladning dq er derfor

$$dW = v(r)\, dq = v(r)\rho\, dV = v(r)\frac{Q}{4\pi R^3/3}\, 4\pi r^2\, dr$$

siden ladningstettheten ρ er konstant og lik den totale ladningen Q delt med det totale volumet $4\pi R^3/3$. Totalt arbeid som trengs for å lage hele kula må bli integralet av dW, og dette blir da også kulas totale potensielle energi U_2:

$$\begin{aligned}
U_2 &= \int dW \\
&= \int v(r)\, dq \\
&= \int v(r)\frac{Q}{4\pi R^3/3}\, 4\pi r^2\, dr \\
&= \int_0^R \frac{Qr^3/R^3}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{Q}{4\pi R^3/3}\, 4\pi r^2\, dr \\
&= \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^6}\int_0^R r^4\, dr \\
&= \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}
\end{aligned}$$

Alternativt, ved å integrere energitettheten uttrykt ved det elektriske feltet: Bruker vi Gauss' lov, finner vi at det elektriske feltet inne i kula (dvs $r < R$) er $E(r) = Qr/4\pi\varepsilon_0 R^3$ og utenfor kula (dvs $r > R$) er det $E(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$. Dermed blir den potensielle energien U_2:

$$
\begin{aligned}
U_2 &= \int_{\text{hele rommet}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \, dV \\
&= \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 4\pi r^2 \, dr + \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 \, dr \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0^2 R^6} \cdot \frac{R^5}{5} + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0^2} \cdot \frac{1}{R} \\
&= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1}{5} + 1\right) \\
&= \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}
\end{aligned}
$$

Samme svar!

4) En ladet metallkule vil tiltrekke seg en kule med motsatt ladning. Den vil imidlertid også tiltrekke seg en nøytral metallkule på grunn av polarisering av den nøytrale kula. (Se ytterligere forklaring under oppgave 9 nedenfor.) Det er da *alltid sant* at minst en av kulene er ladet. (Mens det selvsagt *kan* være sant at begge kulene er ladet.)

5) Gauss' lov gir

$$
\begin{aligned}
E(r) \cdot 4\pi r^2 &= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho(r') \, dV' \\
&= \frac{k}{\varepsilon_0}\int_0^r \frac{1}{r'} \cdot 4\pi (r')^2 \, dr' \\
&= \frac{4\pi k}{\varepsilon_0}\Big|_0^r \frac{1}{2}(r')^2 \\
&= \frac{2\pi k}{\varepsilon_0} r^2
\end{aligned}
$$

for $r < R$. Altså

$$E(r) = \frac{k}{2\varepsilon_0}$$

dvs konstant feltstyrke for $r < R$. For $r > R$ blir feltet som for en punktladning i origo, dvs prop. med $1/r^2$, likt i alle de fire grafene. Merk deg "forenklingene" som kan gjøres når vi har kulesymmetri, og dermed velger kuleformet gaussflate: Flateintegralet av det elektriske feltet blir simpelthen $E(r) \cdot 4\pi r^2$, mens volumelementet blir $dV = 4\pi r^2 \, dr$. I begge tilfelle gav integrasjon over retningene, dvs vinklene θ og ϕ, bare en faktor 4π.

6) Glass-staven er ikke i berøring med metallkulene, så vi kan ikke få noen netto overføring av ladning mellom glass-staven og kulene. Imidlertid vil den positivt ladede glass-staven trekke fri elektroner i metallet til seg, slik at vi får et overskudd av negativ ladning på venstre side av venstre metallkule. Siden metallkulene totalt sett er elektrisk nøytrale, må det bety at høyre kule ender opp med et underskudd av elektroner, altså netto positiv ladning. Dette er igjen polarisering (jfr oppgave 4, 9 og 14), eller "lading ved induksjon" som det også kalles.

7) Ettersom kapasitansen C pr definisjon er gitt ved forholdet mellom ladningen Q på kondensatoren og potensialforskjellen ΔV mellom kondensatorens to ledere, må vi regne ut ΔV mellom de to kuleskallene. Det elektriske feltet mellom de to kuleskallene er

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

som bestemmes f.eks. ved hjelp av Gauss' lov. (Etterhvert bør en vel nesten klare å *huske* at elektrisk felt fra en kulesymmetrisk ladningsfordeling er gitt ved ladningen "innenfor" der vi er, og som om denne ladningen var samlet i sentrum - på samme måte som gravitasjonsfeltet fra en kulesymmetrisk massefordeling, f.eks. jorda.)
Da kan vi bruke sammenhengen

$$\Delta V = V(a) - V(b) = -\int_b^a E(r)\, dr$$

til å bestemme potensialforskjellen ΔV. (Vi integrerer langs en radielt rettet kurve slik at $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = E(r)\, dr(\hat{r} \cdot \hat{r}) = E(r)\, dr$.) Vi får

$$\Delta V = -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

som gir en kapasitans

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

Kommentar: Hvis vi her lar avstanden $d = b - a$ mellom kuleskallene bli veldig liten i forhold til a og b, kan vi skrive

$$\frac{ab}{b-a} = \frac{ab}{d} \simeq \frac{a^2}{d}$$

slik at

$$C \simeq \varepsilon_0 \frac{4\pi a^2}{d} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

der $A = 4\pi a^2 \simeq 4\pi b^2$ er arealet av hvert av kuleskallene. Dvs samme resultat som for en parallellplatekondensator.

8) Kreftene fra ladningene i B og C er like store og motsatt rettet og gir derfor null netto bidrag. Kraften fra ladningen i A peker langs OD. (Vektor-)Summen av kreftene fra de to ladningene midt på CD og BD må peke langs OA. I absoluttverdi må hver av disse være nøyaktig dobbelt så store som kraften fra ladningen i A, ettersom avstanden OA er $\sqrt{2}$ ganger så stor som avstanden fra O ut til de to midtpunktene. I absoluttverdi er vektorsummen av kreftene fra de to ladningene midt på CD og BD en faktor $\sqrt{2}$ større enn lengden av hver av dem. Følgelig er denne vektorsummen også større enn kraften fra ladningen i A. Dermed må totalkraften peke langs OA.

9) Motsatte ladninger tiltrekker hverandre, like ladninger frastøter hverandre. Dessuten vil et ladet objekt alltid tiltrekke seg et nøytralt objekt på grunn av polarisering av det nøytrale objektet: Et positivt ladet objekt vil f.eks. skyve positive ladninger i det nøytrale objektet fra seg og trekke de negative til seg. Nettoeffekten blir tiltrekning på grunn av kortere avstand til

de negative ladningene. (Eks: Lad opp en kam ved å gre deg. Vannet i springen er nøytralt, men tiltrekkes av kammen.)
Dermed: Kulene 2 og 3 må begge være ladet, og med ladning av samme fortegn. Kule 1 kan være nøytral eller være ladet med motsatt ladning av kulene 2 og 3. I begge tilfeller vil den tiltrekkes av kule 2. Det er alt vi kan si, så vi har ikke nok informasjon til å bestemme hva slags ladning vi har på alle kulene.

10) Newtons 3. lov: Kraft og motkraft er motsatt rettet og like store i absoluttverdi.

11) I stedet for å begynne å regne ut feltet fra en slik skive, følger vi tipset gitt i oppgaveteksten og sjekker om noen av de oppgitte alternativene stemmer med det vi vet om feltet fra en slik ladning i visse såkalte "asymptotiske" grenser. For eksempel må feltet fra en viss mengde lokalisert ladning Q på riktig stor avstand x redusere seg til feltet fra en punktladning Q i avstand x, dvs

$$E(x) \to \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

når $x \gg R$. Her holder dette i massevis, for uttrykkene i B, C og D går ikke mot null i denne grensen! (Uttrykket i D har dessuten ikke riktig dimensjon.) Stemmer uttrykket i A? Hvis $x \gg R$, har vi

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1+R^2/x^2}} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{R^2}{2x^2} + \ldots\right) \\ &\simeq \frac{R^2}{2x^2} \end{aligned}$$

slik at $E \simeq Q/4\pi\varepsilon_0 x^2$. Vi kunne også ha sett på feltet i motsatt grense, dvs $x \to 0$. Da bør vi jo få det samme som for et uendelig stort plan, dvs $\sigma/2\varepsilon_0$. Bare feltet i A stemmer med dette:

$$E_A \to \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

med $\sigma = Q/\pi R^2$, dvs ladning pr flateenhet.

12) Ettersom $E(r) = -dV/dr$, må vi for den lineære delen av E ha $E(r) = ar$ (a = positiv konstant), dvs $dV/dr = -ar$. Følgelig er $V(r) = b - ar^2/2$ (b = konstant), en parabel med negativ krumning. Bare kurve 3 stemmer med dette. Vi ser at oppførselen til E og V for store r også er i orden med kurve 3, f.eks. $E(r) \sim 1/r^2$ og $V(r) \sim 1/r$.

13) Bare ladning *innenfor* gaussflaten bidrar til netto elektrisk fluks gjennom den. Feltlinjer fra ladningene på utsiden går både inn gjennom og ut av gaussflaten og bidrar ikke til netto fluks.

14) Det spiller ingen rolle om ladningsfordelingen på metallet ikke lenger er uniform: Det elektrostatiske feltet $\boldsymbol{E}$ er null overalt inne i metallet, så potensialet V må være konstant

overalt. Ikke glem dette: I elektrostatisk likevekt er en sammenhengende elektrisk leder et ekvipotensial.

15) Her kan vi bruke Gauss' lov. Vi velger en gaussflate som i sin helhet ligger inne i den midterste kula. Ettersom vi da er inne i en leder, er $E = 0$ overalt på gaussflaten, og dermed $\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$. Ifølge Gauss' lov er da netto ladning innenfor denne gaussflaten lik null. Vi kan legge gaussflaten så nært inntil den innerste overflaten av midterste kule som vi vil. Siden ladningen på innerste kule er $2Q$, må da ladningen på innerste overflate av midterste kule være $-2Q$. Midterste kule har total ladning $-Q$. Inne i kula kan vi ikke ha noen netto ladning (dette viste vi i forelesningene ved å bruke Gauss' lov). Dermed må den resterende ladning Q ligge på ytre overflate av den midterste kula. (Basert på tilsvarende argument kan vi videre konkludere med at på ytterste kule har vi ladning $-Q$ på indre overflate og null ladning på ytre overflate. På utsiden av alle tre kulene blir dermed den elektriske feltstyrken lik ....)

16) $\boldsymbol{E} = -\nabla V$, dvs $\boldsymbol{E}$ peker i retning av lavere potensial, og står dessuten normalt på ekvipotensialflaten.

17) Den elektriske feltstyrken inne i den dielektriske skiva reduseres i forhold til om vi hadde vakuum der. Dermed blir potensialforskjellen ΔV mellom kondensatorplatene mindre. Påstand A er dermed ikke riktig. Ettersom kapasitansen er gitt ved $C = Q/\Delta V$, betyr det at kapasitansen blir større når ΔV blir mindre (når Q holdes konstant). Altså er påstand B heller ikke riktig. Potensiell energi lagret i kondensatoren må ha blitt mindre etter at vi satte inn den dielektriske skiva. Den konklusjonen kan vi trekke, uansett om vi betrakter energien som lagret i det elektriske feltet (energi pr volumenhet: $u = \varepsilon_0 E^2/2$) eller om vi regner ut arbeidet som skal til for å lade opp kondensatoren fra null ladning til endelig ladning $\pm Q$. Altså er også påstand C feil. Vi står igjen med påstand D, som er riktig: Den elektriske feltstyrken i luftlagene påvirkes ikke av at vi setter inn en dielektrisk skive. Vi får indusert negativ ladning på øverste overflate og like mye positiv ladning på nederste overflate av den dielektriske skiva. I de to luftlagene gir disse to ladningsplanene like store, men motsatt rettede bidrag til det totale elektriske feltet.

18) Vi har f.eks. $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/Q$ og $\Delta V = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l}$. Dessuten er $C = Q/\Delta V$. Vi kan da skrive ned en rekke ulike mulige enheter:

$$[E] = [F/Q] = [\Delta V/l] = [F/C\Delta V]$$

Altså er disse enhetene mulige:
$[E]$ = N/C = V/m = N/FV.
Den siste, kg m^2/s^2 C, er imidlertid ikke riktig. (Det skal ikke være m^2, bare m.)

19) Hvis vi befinner oss i området mellom indre kule og kuleskallet, er netto ladning innenfor en kuleformet gaussflate lik $2Q$. Dermed er den elektriske feltstyrken

$$E(r) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

rettet radielt utover. Hvis vi befinner oss på utsiden av kuleskallet, er netto ladning innenfor en kuleformet gaussflate lik $2Q - Q = Q$. Dermed er den elektriske feltstyrken

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

også her rettet radielt utover. Figur 2 stemmer med dette. Vi ser at dette også stemmer med at feltlinjer for E starter på positive ladninger og ender opp på negative ladninger (eventuelt uendelig langt borte): Ladningen $-Q$ på kuleskallet må fordele seg med $-2Q$ på indre og $+Q$ på ytre overflate. (Se oppgave 15.) Overalt inne i de to lederne må vi selvsagt ha $E = 0$.
Figur 1 ville ha vært riktig dersom metallskallet ikke hadde vært til stede. Figur 3 ville ha vært riktig dersom metallskallet hadde hatt netto ladning $-4Q$ (og dermed ladning $-2Q$ på både indre og ytre overflate). Figur 4 ville ha vært riktig dersom metallskallet hadde hatt netto ladning $-6Q$ (og dermed ladning $-2Q$ på indre flate og $-4Q$ på ytre flate).

20) Et uendelig stort plan med ladning σ pr flateenhet skaper et elektrisk felt $\sigma/2\varepsilon_0$. Den elektriske kraften på et annet plan med ladning Q som plasseres i dette feltet blir dermed $F = QE = Q\sigma/2\varepsilon_0$. Kraften pr flateenhet blir $f = F/A = Q\sigma/2\varepsilon_0 A = \sigma^2/2\varepsilon_0$. Med $\sigma = 10^{-5}$ C/m^2 og $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C^2/N m^2, har vi $f = 100/2 \cdot 8.85 \simeq 5.7$ N/m^2.
Legg merke til at vi ikke kan bruke den *totale* elektriske feltstyrken σ/ε_0 når vi skal finne kraften på den ene plata fra den andre. De to platene bidrar hver med $\sigma/2\varepsilon_0$ til det totale feltet, men en gitt plate virker ikke på seg selv med noen netto kraft. (På samme måte som at du ikke greier å løfte deg selv etter håret....!)