**Institutt for fysikk, NTNU**
**TFY4155/FY1003: Elektromagnetisme**
**Vår 2009**

# Øving 11

Veiledning: Mandag 23. mars og fredag 27. mars
Innleveringsfrist: Fredag 27. mars

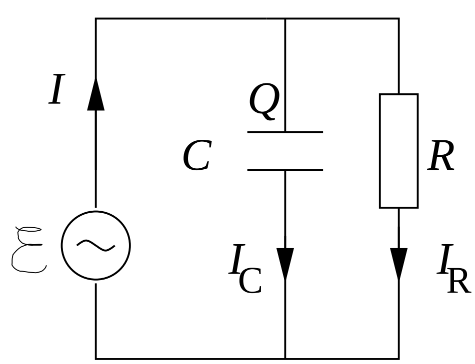
*Oppgave 1*

*Innledning* (dvs vi rekapitulerer fra forelesningen 11. mars):
For en likestrømkrets med spenningskilde $V_0$ som leverer en strøm $I_0$ vil kretsens totale resistans $R$ være gitt ved Ohms lov, $R = V_0/I_0$.
For en vekselstrømkrets med spenningskilde $V_0 \cos \omega t$ som leverer en strøm $I_0 \cos(\omega t - \alpha)$ kan vi på tilsvarende måte definere en "generalisert motstand", eller *impedans* $Z$, for kretsen: $Z = V_0/I_0$. Vi holder her muligheten åpen for at strømmen kan være *faseforskjøvet* med $\alpha$ i forhold til den påtrykte spenningen. Vi skal også se i eksemplene nedenfor at strømamplituden $I_0$ kan bli avhengig av (vinkel-)frekvensen $\omega$, slik at impedansen også kan bli frekvensavhengig, dvs $Z = Z(\omega)$.
I forelesningene regnet vi ut at med en spenningskilde $V_0 \cos \omega t$ koblet til en enkel resistans $R$ blir strømmen $I_0 \cos \omega t$, med amplitude $I_0 = V_0/R$. Dermed blir impedansen til en motstand $R$ simpelthen $Z_R = R$, og det er ingen faseforskjell mellom påtrykt spenning og resulterende strøm, dvs $\alpha_R = 0$.
I neste omgang koblet vi spenningskilden $\mathcal{E}(t) = V_0 \cos \omega t$ til en kapasitans $C$ og fant, med utgangspunkt i at $C = Q/V_C$ (der $\pm Q$ er ladningen på kondensatoren og $V_C$ er spenningsfallet over kondensatoren), at strømmen i kretsen blir

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha_C)$$

med amplitude $I_0 = I_0(\omega) = V_0 \omega C$ og $\alpha_C = -\pi/2$. Dermed blir impedansen til en kondensator $C$ $Z_C = 1/\omega C$, med faseforskyvning $\alpha_C = -\pi/2$.

*I denne oppgaven* skal vi studere en vekselspenningskilde $\mathcal{E}(t) = V_0 \cos \omega t$ som er koblet til en parallellkobling av en kapasitans $C$ og en motstand $R$:



Bruk Kirchhoffs regler til å bestemme strømstyrkene $I(t)$, $I_C(t)$ og $I_R(t)$. Vis at den totale strømmen som leveres av spenningskilden kan skrives på formen

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

med amplitude

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \sqrt{1 + (\omega RC)^2}$$

og fasevinkel

$$\alpha = -\arctan(\omega RC)$$

Tips: Benytt $\cos(a \pm b) = \cos a \, \cos b \mp \sin a \, \sin b$.

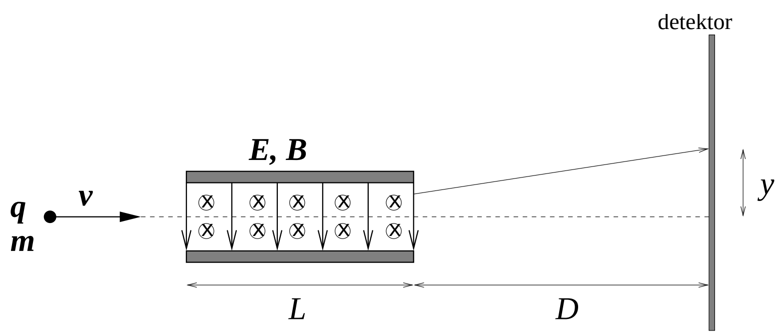
Anta at spenningskilden har amplitude $V_0 = 1.0$ V og frekvens $f = 1.0$ MHz, og at $R = 10\,\Omega$ og $C = 16$ nF. Bestem tallverdier for $I_0$ og $\alpha$. Skisser $\mathcal{E}(t)$, $I(t)$, $I_R(t)$ og $I_C(t)$ for $t$ mellom 0 og $T = 1/f$. (Svar: $I_0 = 0.14$ A, $\alpha = -45°$)

Med de gitte tallverdiene for $V_0$, $R$ og $C$, skisser funksjonene $I_0(\omega)$, $\alpha(\omega)$ og kretsens impedans $Z(\omega) = V_0/I_0(\omega)$ for vinkelfrekvenser mellom $10^5$ og $10^9$ s$^{-1}$.
Tips: Bruk *logaritmisk* skala langs $\omega$-aksen, dvs skisser $I_0$ og $\alpha$ for vinkelfrekvenser slik at $\log \omega$ varierer mellom verdiene 5 og 9.

Bruk gjerne octave eller matlab til å plotte funksjonene i denne oppgaven. (Eller et annet egnet plotteprogram, for eksempel gnuplot.)

*Oppgave 2*

Partikler med masse $m$, ladning $q$ og hastighet $\boldsymbol{v}$ kommer inn i et område med "krysset" elektrisk og magnetisk felt, $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$, som vist i figuren. $\boldsymbol{E}$ har retning nedover, $\boldsymbol{B}$ har retning inn i papirplanet. I området med utstrekning $L$ antar vi at feltene er homogene. Utenfor dette området er $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} = 0$.




Du holder den elektriske feltstyrken $E$ konstant gjennom hele eksperimentet. I det første eksperimentet setter du $B = 0$ og registrerer at partiklene avbøyes og treffer detektoren i en

avstand $y$ ovenfor senterlinjen (som er stiplet). Deretter gjentar du forsøket, men denne gangen justerer du verdien av $B$ inntil partiklene ikke bøyes av.
Vis at forholdet mellom partiklenes ladning og masse er proporsjonal med avbøyningen (når $B = 0$), dvs

$$\frac{q}{m} = -ay,$$

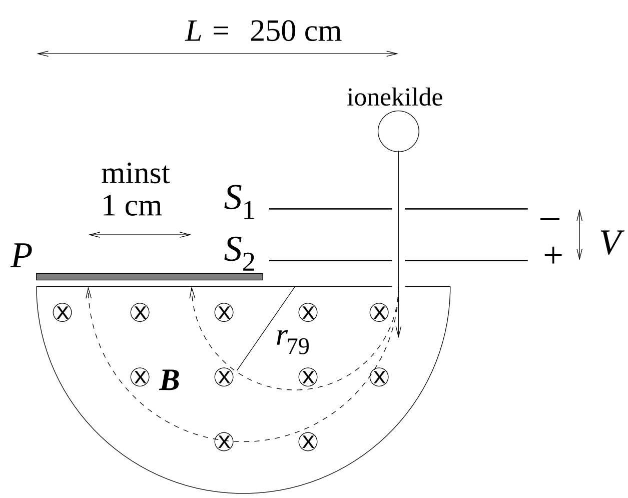
og finn størrelsen $a$ uttrykt ved $E$, $B$, $D$ og $L$.

Oppgitt: $\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$ (Lorentzkraften)

På denne måten analyserte J. J. Thomson i 1897 såkalte katodestråler og påviste at disse bestod av en bestemt type partikler med negativ ladning. Dette er nettopp elektroner som emitteres fra metallet i katoden. Thomson var altså den første som bestemte forholdet $e/m_e$. Thomson fant det samme forholdet uavhengig av hva slags metall han brukte i katoden og kunne konkludere med at de observerte partiklene måtte være en *fundamental* ingrediens i naturen.

Fasit: $a = E/\left(B^2\left(DL + L^2/2\right)\right)$

*Oppgave 3*



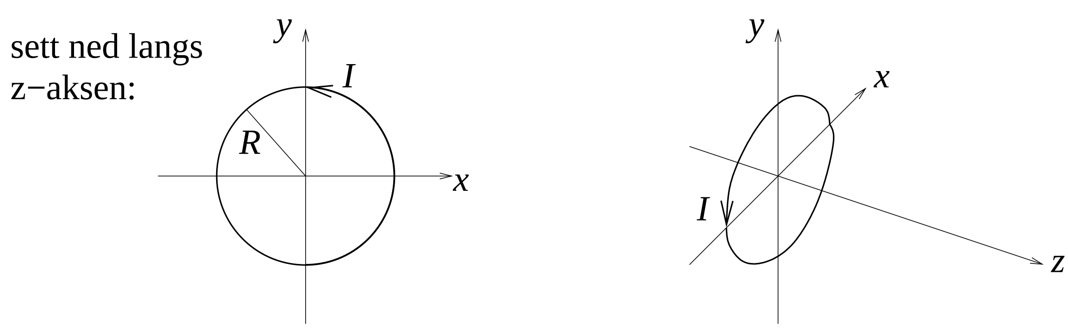

Figuren viser et massespektrometer. En ionekilde emitterer ladete partikler. Åpningene $S_1$ og $S_2$ sørger for at en godt samlet (*kollimert*) partikkelstråle kommer inn i området med magnetfelt $\boldsymbol{B}$ (som har retning inn i papirplanet). Mellom $S_1$ og $S_2$ har vi en spenningsforskjell $V$ som akselererer ionene. Hastigheten ved $S_2$ er mye større enn ved $S_1$, slik at vi kan sette $v = 0$ ved $S_1$. Ionene bøyes i alt 180° av magnetfeltet og detekteres på en fotografisk plate $P$.
Spektrometeret skal brukes til å separere bromisotopene $^{79}$Br og $^{81}$Br. Kilden sender ut disse isotopene i form av ioner med ladning $-e$. Anta at isotopene har atommasser henholdsvis $79m_p$ og $81m_p$.

På den fotografiske platen ønskes isotopenes treffpunkt adskilt med en avstand på minst 1.0 cm. Samtidig må vi sørge for at begge isotopenes treffpunkt havner *på* den fotografiske platen, som har en bredde $L = 250$ cm, målt fra der ionene kommer inn i magnetfeltet. Med disse betingelsene, hva blir øvre og nedre grense for styrken på magnetfeltet $B$ når akselerasjonsspenningen $V$ er 400 V?

Oppgitt: $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg [Ett av svarene: $B_{\text{min}} = 21$ mT]

*Oppgave 4*

Ei sirkulær strømsløyfe med radius $R$ fører en elektrisk strøm $I$. Strømsløyfa ligger i $xy$-planet med sentrum i origo. Retningen på $I$ er mot klokka hvis vi har positiv $z$-akse ut av papirplanet. Vi skal i denne oppgaven bestemme det resulterende magnetfeltet $\boldsymbol{B}(0,0,z) = \boldsymbol{B}(z)$ *på symmetriaksen* til strømsløyfa (dvs på $z$-aksen).




$a$) Hvorfor er $x$- og $y$-komponenten av $\boldsymbol{B}(z)$ lik null? (Tips: Symmetri.)

$b$) I hvilken retning peker $\boldsymbol{B}(z)$ for positive og negative verdier av $z$?

$c$) Bruk Biot–Savarts lov,

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\boldsymbol{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad \left(= \quad \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}\quad\right)$$

til å vise at

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

$d$) Bestem $B(z)$ i stor avstand fra strømsløyfa (dvs: til ledende orden når $z \gg R$) og uttrykk svaret ved hjelp av sløyfas *magnetiske dipolmoment* $m = |\boldsymbol{m}|$. Sammenlign dette uttrykket med det elektriske feltet i stor avstand fra en elektrisk dipol, uttrykt ved det elektriske dipolmomentet $p$ (se øving 4).

*Litt om magnetisk dipolmoment (forelest 18.03.09):*

Magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m}$ for ei plan, lukket strømsløyfe som omslutter et areal $A$ er pr definisjon

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A} = IA\,\hat{n}$$

der $\hat{n}$ er enhetsvektoren normalt til den plane omsluttede flaten. Magnetisk dipolmoment er altså en *vektor* (på samme måte som elektrisk dipolmoment $\boldsymbol{p}$). Positiv retning på $\boldsymbol{m}$ er definert ved hjelp av høyrehåndsregelen: Fire fingre i strømmens retning gir tommelen i samme retning som $\boldsymbol{m}$.

*Noen kommentarer:*

- Merk at ulike lærebøker bruker litt ulik notasjon her: Noen kaller det "magnetisk dipolmoment", andre bare "magnetisk moment". Noen bruker symbolet $\boldsymbol{\mu}$, andre bruker $\boldsymbol{m}$. Uansett, det er samme fysiske størrelse det dreier seg om! Vi velger å bruke symbolet $\boldsymbol{m}$ og kaller det magnetisk dipolmoment, i tråd med f.eks. den norske boka (LHL) og Griffiths. (TM bruker $\boldsymbol{\mu}$, det samme gjør Young og Freedman.)

- I likhet med elektrisk dipolmoment har også magnetisk dipolmoment en mer *generell* definisjon enn den vi innførte ovenfor. (Verden består jo tross alt ikke bare av parvise punktladninger med motsatt fortegn og plane strømsløyfer...!) La oss repetere den generelle definisjonen av elektrisk dipolmoment: Har vi en romladningstetthet $\rho(\boldsymbol{r})$, er elektrisk dipolmoment $\boldsymbol{p}$ pr definisjon

  $$\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r})\; d^3r$$

  Og har vi en strømfordeling gitt ved strømtettheten $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$, er magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m}$ pr definisjon

  $$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\; d^3r$$

  Her går integralet over "hele rommet", dvs der henholdsvis $\rho$ og $\boldsymbol{j}$ er forskjellig fra null. For *spesialtilfellene* som vi stort sett ser på i dette kurset, nemlig parvise punktladninger $\pm q$ i innbyrdes avstand beskrevet ved vektoren $\boldsymbol{d}$, og plane strømsløyfer med stasjonær strøm $I$ som omslutter et areal beskrevet ved vektoren (noen ganger kalt "vektorarealet") $\boldsymbol{A} = A\,\hat{n}$, reduserer disse generelle definisjonene seg nettopp til

  $$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

  og

  $$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$