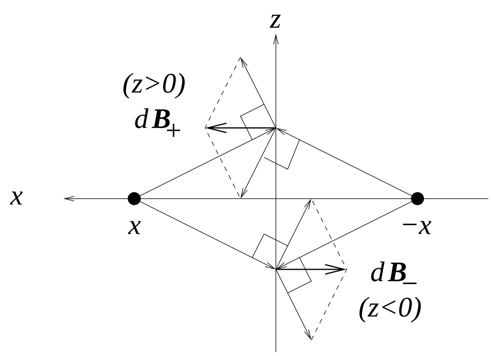
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektromagnetisme
Vår 2009

Løsningsforslag til øving 12

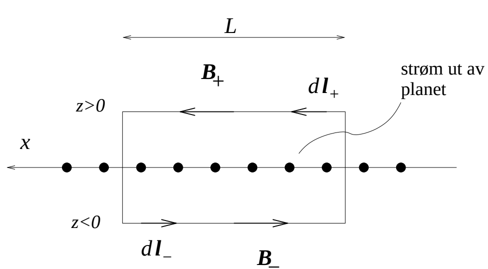
Oppgave 1

Retningen på $\boldsymbol{B}$:

- $B_y = 0$ fordi $d\boldsymbol{B} \sim \hat{y} \times \hat{r} \perp \hat{y}$ ifølge Biot-Savarts lov. (Alle strømbidrag går i y-retningen.)
- $B_z = 0$: Se på figuren nedenfor. Her er $d\boldsymbol{B}_+$ og $d\boldsymbol{B}_-$ bidrag til magnetfeltet henholdsvis over og under xy-planet fra "symmetrisk lokaliserte" uendelig lange, tynne strømførende ledere i posisjon $\pm x$. Biot-Savarts lov og figurbetraktning gir at $\boldsymbol{B}$ må være rettet i positiv x-retning for $z > 0$ og i negativ x-retning for $z < 0$.



Absoluttverdien av magnetfeltet kan ikke avhenge av x eller y når det strømførende planet er uendelig stort. Dessuten må B være like stor en avstand z over xy-planet som en avstand z under. ($B_+ = B_- = B$, se figuren nedenfor) Da skulle vi ha det beste valget av amperekurve klart: Et rektangel med flatenormal i positiv y-retning, symmetrisk plassert i forhold til xy-planet:



Når integrasjonsveien velges som vist i figuren, er strømmen omsluttet av amperekurven *positiv*, ifølge høyrehåndsregelen. Med en lengde L i x-retningen blir den omsluttede strømmen $I_{\text{in}} = i \cdot L$. Amperes lov gir dermed:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \, d\boldsymbol{l} = 2 \cdot B \cdot L = \mu_0 i \cdot L$$

eller

$$B = \mu_0 i/2$$

(På de vertikale bitene av amperekurven er $\boldsymbol{B} \perp \, d\boldsymbol{l}$ så disse gir null bidrag til integralet.) Alternativt kunne vi først ha lagt hele ampererektangelet på en side av xy-planet. Da hadde vi hatt null omsluttet strøm, og dermed fått at B måtte være uavhengig av z. I neste omgang legger vi amperekurven slik at den omslutter en del av xy-planet, og dermed også en viss strøm, og finner det samme som over. Så langt jeg kan se, holder det å bruke Amperes lov *en* gang når vi legger amperekurven symmetrisk om xy-planet.

Oppgave 2

a) Sentripetalakselerasjonen er v_0^2/R mens Coulombkraften er $e^2/4\pi\varepsilon_0 R^2$. Newtons 2. lov gir da

$$m_e \frac{v_0^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e v_0^2}$$

Banedreieimpulsen til elektronet er

$$\boldsymbol{L}_0 = m_e \, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_0 = m_e R \, v_0 \, \hat{z}$$

mens dets magnetiske dipolmoment er

$$\boldsymbol{m}_0 = I\boldsymbol{A} = -\frac{e}{2\pi R/v_0} \cdot \pi R^2 \, \hat{z} = -\frac{1}{2} e v_0 R \, \hat{z} = -\frac{e}{2m_e} \boldsymbol{L}_0$$

b) Den valgte retningen på $\boldsymbol{B}$ fører til at den magnetiske kraften $\boldsymbol{F}_m = -e \, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ blir rettet innover mot kjernen, dvs i samme retning som den tiltrekkende Coulombkraften. Med uendret baneradius R bestemmes dermed hastigheten v av ligningen

$$m_e \frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + evB$$

Dette er en annengradsligning for v,

$$v^2 - \frac{eBR}{m_e} \, v - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R} = 0,$$

med løsning

$$v = \frac{eBR}{2m_e} + \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R} + \left(\frac{eBR}{2m_e}\right)^2}$$

(Løsningen med negativt fortegn foran kvadratroten er negativ og ikke aktuell.)
La oss gå tilbake og se på hastigheten uten magnetfelt:

$$v_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R}}$$

Vi ser umiddelbart at $v > v_0$. Det betyr at det magnetiske dipolmomentet

$$\boldsymbol{m} = -\frac{1}{2} evR\, \hat{z}$$

er større enn før vi skrudde på magnetfeltet. Med andre ord, *endringen*

$$\Delta \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_0$$

er motsatt rettet det ytre magnetfeltet.
Hvis magnetfeltet istedet var rettet nedover, $\boldsymbol{B} = -B\ \hat{z}$, ville den magnetiske kraften bli rettet radielt *utover*, dvs i motsatt retning av Coulombkraften, slik at tilleggsleddet evB i bevegelsesligningen ville komme inn med motsatt fortegn. Dermed ville den nye hastigheten v ha blitt mindre enn v_0, og det magnetiske dipolmomentet også mindre enn før vi skrudde på magnetfeltet. Igjen: *Endringen* i magnetisk dipolmoment ville fremdeles ha vært motsatt rettet det ytre feltet.
Konklusjon: Et ytre magnetfelt påvirker elektronets banebevegelse i atomet på en slik måte at det *induserte* magnetiske dipolmomentet, dvs det magnetiske dipolmomentet knyttet til endringen i banebevegelsen, blir motsatt rettet det påtrykte feltet. Altså *diamagnetisme*.

Oppgave 3

Opplysningene gitt i oppgaveteksten medfører at vi her velger som amperekurve en sirkel som er ko-planar med smultringspolen, med sentum på spolens akse og radius s. Hvis amperekurven ligger inni spolen, vil den omslutte N viklinger som hver fører en strøm I, dvs netto omsluttet strøm NI. Hvis amperekurven ligger utenfor spolen, vil den omslutte null netto strøm: Enten ingen strøm i det hele tatt, eller like mye strøm opp gjennom som ned gjennom den valgte omsluttede flaten. Amperes lov gir da, inni spolen:

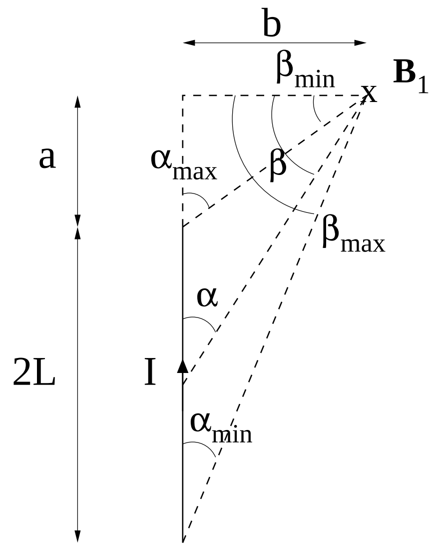
$$\begin{aligned} B(s) \cdot 2\pi s &= \mu_0 NI \\ \Rightarrow B(s) &= \frac{\mu_0 NI}{2\pi s} \end{aligned}$$

og utenfor spolen:

$$\begin{aligned} B(s) \cdot 2\pi s &= 0 \\ \Rightarrow B(s) &= 0 \end{aligned}$$

Oppgave 4

Det vi har bruk for i denne oppgaven, er et uttrykk for magnetfeltet $\boldsymbol{B}_1$ i et vilkårlig punkt, fra en rett strømførende leder med lengde $2L$, strømstyrke I. Med utgangspunkt i følgende figur,



har vi

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\left(\sin\beta_{\max} - \sin\beta_{\min}\right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\left(\cos\alpha_{\min} - \cos\alpha_{\max}\right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi b}\left(\frac{2L+a}{\sqrt{(2L+a)^2+b^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \end{aligned}$$

Hvis vi her setter $a = -L$ og $b = x$, har vi spesialtilfellet med et punkt i avstand x fra lederen, i planet som deler lederen på midten, dvs det vi så på i forelesningene. Men i denne oppgaven skal vi se på magnetfeltet fra en kvadratisk strømførende leder.

La oss starte med et punkt på z-aksen (se figur A nedenfor), og la oss anta $z > 0$. Vi antar også at strømmens retning er slik at det magnetiske dipolmomentet peker i positiv z-retning. De 4 sidekantene bidrar her med like stor feltstyrke. Avstanden fra hver rette lederbit til punktet på z-aksen er $b = \sqrt{z^2 + L^2}$, og vi har nettopp $a = -L$. Bruker vi uttrykket ovenfor, finner vi dermed

$$B_1 = \frac{\mu_0 IL}{2\pi b\sqrt{b^2+L^2}} = \frac{\mu_0 IL}{2\pi\sqrt{z^2+L^2}\sqrt{(z^2+L^2)+L^2}}.$$

Alle disse 4 bidragene har forskjellig retning, og summmen av dem blir en vektor i positiv z-retning. Vi finner z-komponenten av B_1 ved å multiplisere med faktoren

$$\cos\theta = \frac{L}{\sqrt{z^2+L^2}}$$

slik at det totale feltet blir

$$\boldsymbol{B}(z) = \hat{z}\cdot 4\cdot\frac{\mu_0 IL}{2\pi\sqrt{z^2+L^2}\sqrt{z^2+2L^2}}\cdot\frac{L}{\sqrt{z^2+L^2}} = \frac{2\mu_0 IL^2\hat{z}}{\pi(z^2+L^2)\sqrt{z^2+2L^2}}$$

I et punkt på x-aksen ($x > L$) vil sidekantene i $y = L$, $x = -L$ og $y = -L$ gi bidrag som peker i positiv z-retning, mens sidekanten i $x = L$ gir et bidrag i negativ z-retning (se figur B nedenfor). Vi ser på de 4 bidragene hver for seg.
Bidrag fra sidekant i $x = L$ ("nr 1"): Her er $b = x - L$ og $a = -L$, og vi finner

$$\boldsymbol{B}_1(x) = -\frac{\mu_0 I L \hat{z}}{2\pi} \frac{1}{(x-L)\sqrt{(x-L)^2 + L^2}}$$

Bidrag fra sidekant i $x = -L$ ("nr 3"): Her er $b = x + L$ og $a = -L$, og vi finner

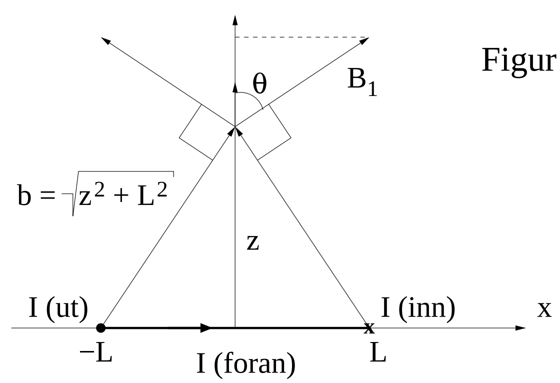
$$\boldsymbol{B}_3(x) = \frac{\mu_0 I L \hat{z}}{2\pi} \frac{1}{(x+L)\sqrt{(x+L)^2 + L^2}}$$

Bidragene fra sidekantene i $y = L$ ("nr 2") og $y = -L$ ("nr 4") er like store og har samme retning, så disse to tar vi i en smekk. I dette tilfellet er $b = L$ og $a = x - L$, som gir

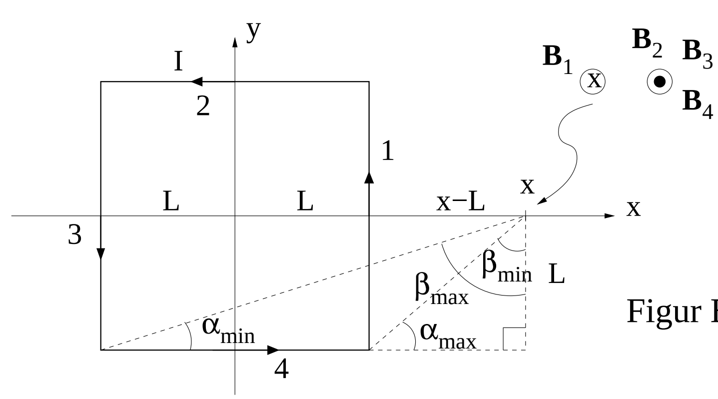
$$\boldsymbol{B}_2(x) = \boldsymbol{B}_4(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \left[\frac{x+L}{\sqrt{(x+L)^2 + L^2}} - \frac{x-L}{\sqrt{(x-L)^2 + L^2}} \right]$$

Totalt felt blir summen av disse 4:

$$\boldsymbol{B}(x) = \boldsymbol{B}_1(x) + \boldsymbol{B}_2(x) + \boldsymbol{B}_3(x) + \boldsymbol{B}_4(x)$$



Figur A



Figur B

La oss nå regne ut hva magnetfeltet blir til ledende orden langt ute på hhv z- og x-aksen. Dette blir lettest langt ute på z-aksen. Da kan vi i uttrykket for $\boldsymbol{B}(z)$ ganske enkelt neglisjere L^2 og $2L^2$ i forhold til z^2 i nevneren:

$$\boldsymbol{B}(z) \simeq \frac{2\mu_0 I L^2 \hat{z}}{\pi z^3}$$

Og dette er konsistent med $\boldsymbol{B}_{\text{dipol}}(\boldsymbol{r})$ gitt i oppgaveteksten: Sløyfa har magnetisk dipolmoment

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A} = I \cdot 4L^2 \hat{z}$$

og for et punkt på z-aksen er

$$\hat{r} = \hat{z}$$

Dermed:

$$\boldsymbol{B}_{\text{dipol}}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi z^3}\left[3 \cdot 4IL^2\hat{z} - 4IL^2\hat{z}\right] = \frac{2\mu_0 I L^2 \hat{z}}{\pi z^3}$$

For et punkt langt ute på x-aksen er

$$\hat{r} = \hat{x}$$

slik at første ledd i $\boldsymbol{B}_{\text{dipol}}$ forsvinner. Vi står igjen med

$$\boldsymbol{B}_{\text{dipol}}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi x^3}\left[-4IL^2\hat{z}\right] = -\frac{\mu_0 I L^2 \hat{z}}{\pi x^3}$$

Vi regner ut ledende ordens bidraget fra den eksakte $\boldsymbol{B}(x)$:

$$\begin{aligned}
B_1(x) &= -\frac{\mu_0 I L}{2\pi x^2}\frac{1}{(1-L/x)(1-2L/x+2(L/x)^2)^{1/2}} \\
&\simeq -\frac{\mu_0 I L}{2\pi x^2}\left(1+\frac{L}{x}\right)\left(1+\frac{L}{x}\right) \\
&\simeq -\frac{\mu_0 I L}{2\pi x^2}\left(1+\frac{2L}{x}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3(x) &= \frac{\mu_0 I L}{2\pi x^2}\frac{1}{(1+L/x)(1+2L/x+2(L/x)^2)^{1/2}} \\
&\simeq \frac{\mu_0 I L}{2\pi x^2}\left(1-\frac{L}{x}\right)\left(1-\frac{L}{x}\right) \\
&\simeq \frac{\mu_0 I L}{2\pi x^2}\left(1-\frac{2L}{x}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_2(x) + B_4(x) \\
= \; & \frac{\mu_0 I}{2\pi L}\left[\frac{1+L/x}{(1+2L/x+2(L/x)^2)^{1/2}} - \frac{1-L/x}{(1-2L/x+2(L/x)^2)^{1/2}}\right] \\
\simeq \; & \frac{\mu_0 I}{2\pi L}\left[(1+L/x)(1-L/x+L^2/2x^2+L^3/2x^3) - (1-L/x)(1+L/x+L^2/2x^2-L^3/2x^3)\right] \\
\simeq \; & \frac{\mu_0 I}{2\pi L}\left[\frac{2L^3}{x^3}\right]
\end{aligned}$$

Og summen av disse blir nettopp

$$B(x) \simeq -\frac{\mu_0 I L^2}{\pi x^3},$$

dvs det samme som $B_{\text{dipol}}(x)$ ovenfor.