TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 12.

1) Med isoterme forhold og ideell gass blir bulkmodulen

$$B = -V(\partial p/\partial V)_T = -V(\partial(Nk_BT/V)/\partial V)_T = Nk_BT/V,$$

slik at $v = \sqrt{(Nk_BT/V)/(mN/V)} = \sqrt{k_BT/m}$. Riktig svar: B.

2) Med adiabatiske forhold og ideell gass er pV^γ konstant, dvs vi kan skrive $p(V) = AV^{-\gamma}$. Bulkmodulen blir da

$$B = -V \cdot A \cdot (-\gamma)V^{-\gamma-1} = \gamma p,$$

og siden $p = Nk_BT/V$, har vi $v = \sqrt{\gamma k_BT/m}$. Riktig svar: A.

3) Molar masse 29 gram gir molekylmasse $m = 0.029/6.022 \cdot 10^{23}$ kg $= 4.82 \cdot 10^{-26}$ kg. Med $T = 293$ K gir dette $v = 290$ m/s. Riktig svar: A.

4) Luft er nesten utelukkende en toatomig gass, slik at $\gamma \simeq 1.4$. Dette gir $v = 343$ m/s. Riktig svar: D.

5) I en ideell gass er det ingen vekselvirkning mellom molekylene, slik at indre energi U er lik molekylenes kinetiske energi K. Toatomige molekyler har 5 kvadratiske ledd i energifunksjonen: $K = (m/2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + (I_0/2)(\omega_x^2 + \omega_y^2)$ (når vi velger z-aksen langs molekylets akse; null treghetsmoment med hensyn på rotasjon omkring molekylets akse for lineære molekyler; intet bidrag fra kinetisk vibrasjonsenergi, da tilgjengelig termisk energi ved normale temperaturer er for liten til å eksitere vibrasjonsbevegelse i toatomige molekyler (utover laveste vibrasjonsenergitilstand, den såkalte grunntilstanden)). Ekvipartisjonsprinsippet sier at hvert kvadratiske ledd i energifunksjonen gir et bidrag $k_BT/2$ til indre energi U pr molekyl når systemets temperatur er T. Dermed er $U(T) = 5Nk_BT/2$ for en ideell toatomig gass. Da er $C_V = (dQ/dT)_V = (dU/dT)_V$ (siden $dW0p\,dV = 0$ når eksperimentet foretas ved konstant volum), dvs $C_V = 5Nk_B/2$. Hvis eksperimentet foretas ved konstant trykk, er $C_p = (dQ/dT)_p = (dU/dT)_p + p(dV/dT)_p = 5Nk_B/2 + p \cdot Nk_B/p = 7Nk_B/2$. Riktig svar: C.

6) Arbeid utført pr syklus er gitt ved arealet som omsluttes av kurven $p(V)$. Her blir da $W = (5p_0 - p_0) \cdot (4V_0 - V_0) = 12p_0V_0$. Riktig svar: C.

7) La oss nummerere de fire hjørnene av den rektangulære $p(V)$-kurven fra 1 til 4, med klokka, og med tilstand 1 oppe til venstre, dvs $p_1 = 5p_0$ og $V_1 = V_0$ Ideell gass tilstandsligning gir da
$T_1 = p_1V_1/Nk_B = 5p_0V_0/Nk_B$, $T_2 = p_2V_2/Nk_B = 20p_0V_0/Nk_B$, $T_3 = p_3V_3/Nk_B = 4p_0V_0/Nk_B$, og $T_4 = p_4V_4/Nk_B = p_0V_0/Nk_B$. I stigende rekkefølge, og i enheten p_0V_0/Nk_B blir dette $T_4 = 1$, $T_3 = 4$, $T_1 = 5$ og $T_2 = 20$. Riktig svar: D.

8) Varme som overføres fra omgivelsene til gassen er $C_p\Delta T$ for de to isobare delprosessene (12 og 34), og $C_V\Delta T$ for de to isokore delprosessene (23 og 41). Siden temperaturen i gassen avtar fra tilstand 2 til tilstand 3, og fra tilstand 3 til tilstand 4, er dette delprosesser der varme *avgis* fra gassen til omgivelsene. Dette er ikke varme som vi må betale for, og skal dermed ikke regnes med når virkningsgraden skal beregnes. I den isobare utvidelsen fra 1 til 2 og i den isobare trykkøkningen fra 4 til 1, derimot, øker temperaturen i gassen. Dette gir positiv varmeoverføring fra omgivelsene til gassen, slik at Q_{12} og Q_{41} skal regnes med ved beregning av η. Her blir $Q_{12} = (7Nk_B/2) \cdot (T_2 - T_1) = 105p_0V_0/2$ og $Q_{41} = (5Nk_B/2) \cdot (T_1 - T_4) = 10p_0V_0$. I alt blir $Q_{\text{inn}} = 125p_0V_0/2$, slik at virkningsgraden er

$$\eta = W/Q_{\text{inn}} = 12/(125/2) = 24/125 \simeq 0.19.$$

Riktig svar: A.
Kommentar: En Carnot-prosess med isotermer ved høyeste (T_2) og laveste (T_4) temperatur i den aktuelle

prosessen ville hatt virkningsgrad $\eta_C = 1 - T_4/T_2 = 1 - 1/20 = 0.95$. Dette er en øvre teoretisk grense, og vi ser at vår kretsprosess har virkningsgrad (0.19) betydelig mindre enn dette.

9) Isobar utvidelse fra a til b betyr at $T_a < T_b$. Isoterm utvidelse fra b til c betyr at $T_b = T_c$. Adiabatisk kompresjon fra d til a betyr at $T_d < T_a$ (siden en adiabat er brattere enn en isoterm i et pV-diagram). Dermed er $T_d < T_a < T_b = T_c$. Riktig svar: B.

10) Isobar kompresjon fra a til b betyr at $T_a > T_b$. Isoterm utvidelse fra b til c betyr at $T_b = T_c$. Adiabatisk kompresjon fra d til a betyr at $T_d < T_a$ (siden en adiabat er brattere enn en isoterm i et pV-diagram). Dermed er $T_b = T_c < T_d < T_a$. Riktig svar: D.

11) En Carnot-varmepumpe har effektfaktor

$$\varepsilon_V^C = |Q_2/W| = |Q_2/(Q_2 + Q_1)| = |1/(1 + Q_1/Q_2)| = |1/(1 - T_1/T_2)| = T_2/(T_2 - T_1).$$

Her er T_2 temperaturen til det varme reservoaret, dvs inne i stua, og T_1 er temperaturen til det kalde reservoaret, dvs ute. Din venn hevder at han oppnår $Q_2 = 10$ kW med $W = 1$ kW når $T_1 = 253$ K. Dette høres veldig mye ut: Hvis vi går ut fra at din venn i hvert fall har 15 varmegrader inne i stua, dvs minst $T_2 = 288$ K, vil en Carnot-varmepumpe ikke kunne levere mer enn $Q_2 = W \cdot T_2/(T_2 - T_1) = 1 \cdot 288/35 = 8.2$ kW. Mer enn dette vil det ikke være mulig å få ut av en reell varmepumpe, og i praksis vil nok effektfaktoren være en god del mindre enn som så. Men du kan trygt gratulere din venn med en god investering – en god varmepumpe kan gi god fyringsøkonomi i dag. Du kan tillate deg alternativ C, eventuelt alternativ B, hvis du ikke er av den snakkesalige typen. Men A og D vil ikke se bra ut.

12) En Carnot-kjølemaskin har effektfaktor

$$\varepsilon_K^C = |Q_1/W| = |Q_1/(Q_1 + Q_2)| = |1/(1 + Q_2/Q_1)| = |1/(1 - T_2/T_1)| = T_1/(T_2 - T_1).$$

Dermed: $W = Q_1 \cdot (T_2 - T_1)/T_1 = 500 \cdot 33/255 = 65$ W. Riktig svar: B.