

**TFY4104/TFY4125 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.**  
**Løsningsforslag til Ekstra 5.**

a) Rakettligningen:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + u \frac{dm}{dt}.$$

Vi ganger ligningen med  $dt/m$  og integrerer, fra 0 til  $v$  for  $v$ , fra 0 til  $t$  for  $t$ , og fra  $m_0$  til  $m$  for  $m$ :

$$\int_0^v dv = -g \int_0^t dt + u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m},$$

som gir

$$v(t) = -gt + u \ln \frac{m}{m_0} = -u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

b) Må ha skyvkraft minst like stor som tyngdekraften  $m_0 g = 2.98 \cdot 10^7$  N. Her er skyvkraften lik  $u\beta = 3.40 \cdot 10^7$  N, så raketten vil lette fra bakken. Drivstoffmassen ved avreise er  $m_d = -\beta t_f = 1.98 \cdot 10^6$  kg. Raketten uten drivstoff har masse  $m_f = m_0 - m_d = 1.06 \cdot 10^6$  kg.

c) Fra rakettligningen har vi umiddelbart

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -g + \frac{u}{m} \frac{dm}{dt} = \frac{u\beta}{m} - g.$$

Med konstant drivstoff-forbruk har vi  $m = m_0 + \beta t$ , og dermed  $a(t)$  som oppgitt. Ved  $t = 0$ :  $a(0) = u\beta/m_0 - g = 1.39$  m/s<sup>2</sup>. Ved  $t = t_f$ :  $a(t_f) = u\beta/m_f - g = 22.3$  m/s<sup>2</sup>.

Innsetting av tallverdier i  $v(t)$  fra oppgave a) gir  $v(t_f) \simeq 1247$  m/s  $\simeq 1.25$  km/s.

d) Vi kan skrive

$$a(t) = \frac{u\beta}{m_0} \frac{1}{1 + \beta t/m_0} - g.$$

Hvis  $t \ll m_0/(-\beta)$ , så er  $x = -\beta t/m_0 \ll 1$ . Dermed er

$$a(t) \simeq a_{\text{lin}}(t) = \frac{u\beta}{m_0} \left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right) - g = a(0) - \frac{u\beta^2}{m_0^2} t,$$

som oppgitt.

e) Tilbakelagt distanse er gitt ved

$$h(t) = \int_0^t v(t) dt.$$

Vi har at

$$\int \ln x dx = x \ln x - x,$$

siden den deriverte av høyre side her gir tilbake  $\ln x$ . Litt fundering på hvordan riktige konstanter skal velges her og der gir da

$$h(t) = u \frac{m_0 + \beta t}{\beta} \ln \frac{m_0 + \beta t}{m_0} - ut - \frac{1}{2} gt^2,$$

og setter vi inn  $t = t_f = 150$  s her, finner vi at  $h(t_f) = 58353$  m  $\simeq 58.4$  km.

Forholdet mellom  $g(0)$ , dvs  $g$  ved jordoverflaten, og  $g(h)$ , dvs  $g$  i høyden  $h$  over bakken, er

$$\frac{g(0)}{g(h)} = \left( \frac{R+h}{R} \right)^2.$$

Setter vi inn  $R = 6.37 \cdot 10^3$  km og  $h = h_f = 58.4$  km, finner vi at dette forholdet blir ca 1.02. Med andre ord, vi gjør ikke større feil enn et par prosent ved å bruke samme verdi 9.81 m/s<sup>2</sup> for  $g$  for hele distansen.