

TFY4104/TFY4125 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Ekstra 6.

Oppgave 4.

d) Total dreieimpuls blir

$$L_z = L = M[\mathbf{r} \times \mathbf{V}]_z + I_0\omega = MRV + I_0\omega$$

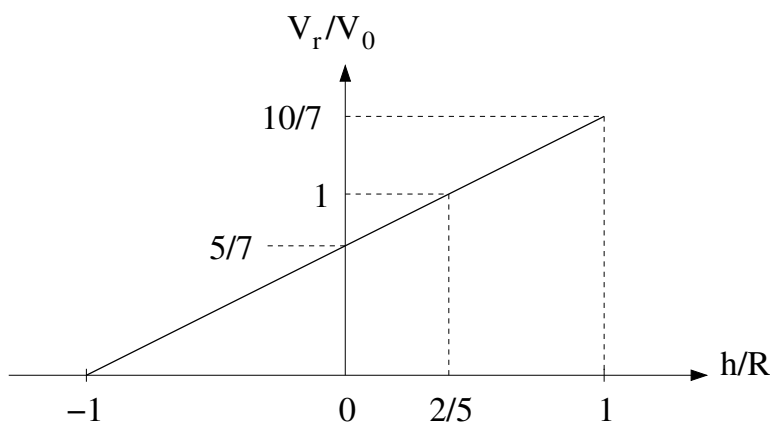
$$\text{start: } L_0 = MRV_0 + (2/5)MR^2\omega_0 \stackrel{??}{=} MRV_0(1 + h/R)$$

$$\text{ved ren rulling: } L_r = MRV_r + (2/5)MR^2 \cdot V_r/R = (7/5)MRV_r.$$

Da dreieimpulsen er bevart, må vi ha $L_0 = L_r$, som gir hastigheten når ren rulling er oppnådd:

$$\underline{V_r = \frac{5}{7} \left(1 + \frac{h}{R}\right) V_0.} \quad (1)$$

Riktig svar: C.



Når $h/R = +\frac{2}{5}$, finner vi $V_r = V_0$, som vi burde. Når $h/R > \frac{2}{5}$, vil altså massesenterhastigheten *øke* på vei mot den endelige rullebevegelsen, ellers vil den avta. Merk at $V_r \geq 0$ *alltid*, uansett hvor lavt på kula køen treffer, dvs det er ikke mulig å få kula til å trille tilbake etter at ren rulling er oppnådd. For $h = -R$ (vanskelig i praksis!) stopper kula.

e) Når translasjonshastigheten endres fra V_0 til V_r i løpet av en tid t_r (som skal bestemmes), er det ene og alene friksjonskraften $f = \mu_k Mg$ som gir denne akselerasjonen. Akselerasjonen $a = f/M = \mu_k g$ er konstant, og vi kan bruke konstant-akselerasjonslikningen $V_r = V_0 + at_r$ til å bestemme t_r . Som funnet i b) peker f mot høyre, og a er positiv når $h/R > 2/5$, mens f peker mot venstre og a er negativ når $h/R < 2/5$. Vi tar for oss tilfellet positiv a :

$$\begin{aligned} V_r &= V_0 + at_r & \text{og} & & V_r &= \frac{5}{7} \left(1 + \frac{h}{R}\right) V_0 \\ \Rightarrow t_r &= \frac{1}{a} (V_r - V_0) = \frac{1}{\mu_k g} \left(-\frac{2}{7} + \frac{5}{7} \frac{h}{R}\right) V_0 = V_0 \frac{2}{7\mu_k g} \left(\frac{5}{2} \frac{h}{R} - 1\right) \quad \text{når } h/R > 2/5. \end{aligned}$$

Riktig svar: A.

Når $h/R < 2/5$, blir $a = -\mu_k g$, og fortegnet snus:

$$t_r = V_0 \frac{2}{7\mu_k g} \left(1 - \frac{5}{2} \frac{h}{R}\right) \quad \text{når } h/R < 2/5.$$

Om ønsket kan vi sammenfatte dette til en ligning:

$$t_r = \frac{2V_0}{7\mu_k g} \left| 1 - \frac{5}{2} \frac{h}{R} \right| \quad \text{for alle } h/R \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Verdien er 0 *bare* for $h/R = 2/5$, i tråd med det vi visste fra før.

f) Energiberegninger: Først startenergien uttrykt ved translasjonsenergien $\frac{1}{2}MV_0^2$:

$$K_0 = \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 \stackrel{(?)}{=} \frac{1}{2}MV_0^2 \left(1 + \frac{5}{2} \frac{h^2}{R^2} \right).$$

Dernest energi for den rullende kula med $\omega_r = V_r/R$:

$$K_r = \frac{1}{2}MV_r^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_r^2 = \frac{1}{2}MV_r^2 \cdot \frac{5}{7} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2}MV_0^2 \cdot \frac{5}{7} \left(1 + \frac{h}{R} \right)^2.$$

Og vi kan uttrykke energitapet:

$$\Delta K = K_r - K_0 = \frac{1}{2}MV_0^2 \left[\frac{5}{7} \left(1 + 2\frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2} \right) - \left(1 + \frac{5}{2} \frac{h^2}{R^2} \right) \right] = \frac{1}{2}MV_0^2 \cdot \frac{2}{7} \cdot \left(1 - \frac{5}{2} \frac{h}{R} \right)^2$$

etter litt algebra. Vi kan også uttrykke relativ energi etter at rulling er oppnådd:

$$\epsilon = \frac{K_r}{K_0} = \frac{\frac{5}{7} \left(1 + \frac{h}{R} \right)^2}{1 + \frac{5}{2} \frac{h^2}{R^2}}.$$

En kontroll: Med et støt som gir ren rulling ($h/R = 2/5$) er $\epsilon = 1$, dvs ikke energitap. Med $h = -R$ er $\epsilon = 0$, dvs 100% energitap. Dessuten: Med $h = +R$ er $\epsilon = 40/49$ og med $h = 0$ er $\epsilon = 5/7$.

g) Det er konstant akselerasjon slik at lengden som kula glir langs underlaget før ren rulling oppnås, finnes fra gjennomsnittsfarten $\langle V \rangle$:

$$x_r = \langle V \rangle t_r = \frac{1}{2}(V_r + V_0) t_r = \frac{2V_0^2}{49\mu_k g} \left(6 + \frac{5h}{2R} \right) \left| 1 - \frac{5h}{2R} \right|,$$

der vi har brukt uttrykk for V_r og t_r ovenfra. Kontroll: $x_r = 0$ når $h/R = 2/5$.

Vi har lært at det kreves relativt omfattende regning for å bestemme t_r eller x_r , mens V_r i pkt d) (og dermed, med litt ekstra faktoreringsstrev, ΔK) faller nesten rett ut ved bruk av dreieimpulsbevarelse.

Det ville også ha vært interessant å analysere bevegelsen etter et støt som treffer til høyre eller venstre for xy -planet. Dette vil gi sidelengs rotasjon (ω vertikal), noe som kan gi en ikkelineær bane. For curlingspillere er vertikal ω viktig for curlingsteinens videre bevegelse. Men det er utfordrende å regne på!

Oppgave 5

f) Like etter sammenstøtet har alle deler av staven, inklusive den "absorberte" kula, hastighet i positiv x -retning:

$$\mathbf{v}(y) = -\omega y \hat{x},$$

slik at $\mathbf{v} = 0$ ved A ($y = 0$) og $\mathbf{v} = \omega D \hat{x}$ helt nederst ($y = -D$). Gjennomsnittshastigheten for staven blir dermed $\omega D \hat{x}/2$ og dens impuls $M\omega D \hat{x}/2$. Til dette må vi huske å addere kulas impuls $m\omega d \hat{x}$. Følgelig:

$$\mathbf{p}_f = \left(\frac{1}{2}MD + md \right) \omega \hat{x}.$$

Innsetting for ω fra e) gir

$$\mathbf{p}_f = \frac{mv + MvD/2d}{1 + MD^2/3md^2} \hat{x}.$$

Siden vi skal sammenligne p_f med p_i , trekker vi ut $mv = p_i$ fra telleren og får

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_i \frac{1 + MD/2md}{1 + MD^2/3md^2}.$$

Riktig svar: A.

g) Her vil forholdet mellom leddene som adderes til 1 i teller og nevner avgjøre om det er p_f eller p_i som er størst:

$$\frac{MD/2md}{MD^2/3md^2} = \frac{3d}{2D}.$$

Dermed: Hvis $d = 2D/3$, er $p_f = p_i$. Treffer kula nøyaktig her, ønsker stavens øvre ende ikke å bevege seg i sammenstøtet, og vi har faktisk impulsbevarelse.

Hvis $d > 2D/3$: Kula treffer staven så langt ned at rotasjonsbevegelsen ville ha blitt slik at stavens øverste ende rett etter støtet ville ha beveget seg mot venstre. Men staven er festet i A og beveger seg ikke der. Dette må skyldes en kraft $\mathbf{F}$ fra akslingen på staven i A rettet mot høyre. Og et ytre kraftstøt $\mathbf{F} \cdot \Delta t$ rettet mot høyre vil som kjent gi en økning i systemets impuls i denne retningen. (Her er Δt sammenstøtets (korte) varighet.)

Tilsvarende: Hvis $d < 2D/3$, treffer kula staven så langt opp at øverste ende "prøver" å bevege seg mot høyre. En kraft fra akslingen rettet mot venstre forhindrer dette, og gir samtidig systemet en redusert impuls mot høyre.

(I det *videre forløpet*, når tyngdekraften får virke på systemet, med en arm mhp A som ikke er null, har vi selvsagt ikke impulsbevarelse - og heller ikke dreieimpulsbevarelse - men det var det ikke spørsmål om her.)

h) Kinetisk energi før støtet:

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2.$$

Kinetisk energi rett etter støtet:

$$\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2}m(\omega d)^2 + \frac{1}{2} \int_{\text{staven}} dm(\omega y)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 d^2 + \frac{1}{2} \int_{-D}^0 \frac{Mdy}{D} \omega^2 y^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 d^2 + \frac{1}{6}MD^2\omega^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}md^2 + \frac{1}{6}MD^2 \right) \frac{(v/d)^2}{(1 + MD^2/3md^2)^2} \\ &= \dots \\ &= \frac{K_i}{1 + MD^2/3md^2}. \end{aligned}$$

Dermed er endringen i kinetisk energi

$$\Delta K = K_f - K_i = -\frac{K_i}{1 + 3md^2/MD^2},$$

og relativ endring, i absoluttverdi, som i alternativ A i oppgaveteksten.

Hvis kula har mye større masse enn staven, $m \gg M$, er $\Delta K/K_i \simeq 0$. Det høres rimelig ut: Staven representerer kun en "ubetydelig hindring" for kula, som (rett etter støtet) fortsetter som om intet hadde hendt.

Hvis kula derimot har mye mindre masse enn staven, $m \ll M$, blir $\Delta K/K_i \simeq -1 = -100\%$. Det høres også rimelig ut: Staven er så tung i forhold til kula at den henger praktisk talt i ro etter støtet. (Tenk bare på grensen $M \rightarrow \infty$; da er staven som en ”massiv vegg”, all bevegelse opphører, og hele den kinetiske energien er tapt som varme og eventuelt deformasjon av kule og stav.)

Oppgave 7: Svingninger

i) Med utsving x fra likevektsstilling er kraften på massen m de to fjærkreftene $-k_1x$ og $-k_2x$. N2 gir svingeligningen

$$-k_1x - k_2x = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}\right)x = 0.$$

Sammenligning med ”standardligningen” $\ddot{x} + \omega^2x = 0$ gir at svingefrekvensen ω er gitt av

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad \text{altså} \quad \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Sammenligning med $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ viser også at effektiv fjærstivhet for parallellkoblede fjærer er $k = k_1 + k_2$. Riktig svar: C.

j) Når m forskyves x mot høyre, strekkes fjærene x_1 og x_2 , og slik at x_1 og x_2 er forskjellige dersom $k_1 \neq k_2$. Kraften F på massen m forplanter seg gjennom begge fjærene med samme strekk (N3 og masseløse fjærer). Dermed er $F = -k_1x_1 = -k_2x_2$, som gir $x = x_1 + x_2 = -(1/k_1 + 1/k_2)F$. Dermed er kraften som virker på klossen lik

$$F = -\frac{1}{1/k_1 + 1/k_2}x = -\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x$$

og N2 gir

$$-\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k_1k_2}{(k_1 + k_2)m}x = 0.$$

Sammenligning med $\ddot{x} + \omega^2x = 0$ gir at svingefrekvensen ω er gitt av

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{(k_1 + k_2)m}{k_1k_2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1^2\omega_2^2}, \quad \text{altså} \quad \omega = \frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}.$$

Sammenligning med $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ viser også at effektiv fjærstivhet for seriekoblede fjærer er $k = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$. Riktig svar: B.

k) Med utsving x fra likevektsstilling vil høyre fjær k_2 presses sammen x og gi en kraft $-k_2x$ mot venstre på massen. Venstre fjær vil strekkes x og gi en kraft $-k_1x$ mot venstre. Kreftene er altså de samme som i a), og $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$. Riktig svar: C.

LF til oppgaver opprinnelig inkludert i Test 6

Oppgave 1

Total kinetisk energi er summen av translasjons- og rotasjonsenergi ($c = 2/5$):

$$K = (1 + c)MV^2/2 = (7/10) \cdot 0.130 \cdot 0.50^2 \simeq 0.023 \text{ J} = 23 \text{ mJ}.$$

Riktig svar: C.

Oppgave 2

Snookerkulas spinn:

$$L_s = I_0\omega = \frac{2}{5}MR^2 \cdot \frac{V}{R} = \frac{2}{5}MRV = 0.4 \cdot 0.130 \cdot \frac{52.5 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot 0.50 \simeq 6.8 \cdot 10^{-4} = 0.68 \text{ mJs.}$$

Riktig svar: B.

Oppgave 3

Vinkelen mellom en langside og diagonalen er

$$\alpha = \arctan(1778/3569) = 26.48^\circ.$$

Da er avstanden fra diagonalen til et midthull

$$d = (3569/2) \text{ mm} \cdot \sin 26.48^\circ \simeq 796 \text{ mm.}$$

Banedreieimpulsen relativt et midthull er derfor

$$L_b = MVd = 0.130 \text{ kg} \cdot 0.50 \text{ m/s} \cdot 0.796 \text{ m} \simeq 52 \text{ mJs.}$$

Riktig svar: D.

Oppgave 4

La oss si at de fleste voksne mennesker har masse mellom 50 og 100 kg. Hvis vi deretter skriver treghetsmomentet på formen $I_0 = MR_0^2$, med såkalt "treghetsradius" R_0 , koker dette ned til å anslå et rimelig intervall som dekker treghetsradien for de fleste voksne mennesker. Tja ... la oss satse på at R_0 er minst 10-15 cm og maksimalt 25-30 cm, kanskje? Da vil I_0 ligge mellom

$$I_0^{\min} = 50 \cdot 0.10 \cdot 0.10 = 0.5 \text{ kgm}^2$$

og

$$I_0^{\max} = 100 \cdot 0.30 \cdot 0.30 = 3 \text{ kgm}^2.$$

Alternativ B passer best med dette estimatet. Riktig svar: B.

Oppgave 5

Total kinetisk translasjonsenergi:

$$K_{\text{trans}} = \frac{1}{2}MV^2.$$

Hjulenes rotasjonsenergi:

$$K_{\text{rot}} = 4 \cdot \frac{1}{2}I_0\omega^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{V^2}{r^2} = mV^2.$$

Dermed:

$$\frac{K_{\text{rot}}}{K_{\text{trans}}} = \frac{m}{M/2} = \frac{2m}{M} = \frac{30}{1000}.$$

Riktig svar: C.

Oppgave 6

N2: $F = \Delta p / \Delta t = MV_0 / \Delta t \Rightarrow V_0 = F \Delta t / M = 500 \cdot 0.001 / 0.128 = 3.9 \text{ m/s.}$

Riktig svar: E.

Oppgave 7

Mhp CM er $\tau = 0$ i selve støtet, slik at kula glir uten å rulle i starten. Dermed må friksjonskraften f virke mot venstre, og figur A blir riktig. ($N = Mg$) Riktig svar: B.

Oppgave 8

Vi bruker dreieimpulsbevarelse: $MRV_0 = MRV + I_0\omega$ som med ren rulling ($V = \omega R$) og oppgitt treghetsmoment I_0 gir $MRV_0 = MRV + 2MRV/5 = 7MRV/5$, dvs $V = 5V_0/7$. Riktig svar: E.

Oppgave 9

Null hastighet betyr kinetisk energi $K = 0$, og siden $E = K + U$, er det klart at $v = 0$ betyr at $U = E$. Riktig svar: C.

Oppgave 10

Her har vi med god tilnærming $\omega = \sqrt{k/m} \simeq \sqrt{800/(1.66 \cdot 10^{-27})} \simeq 2\pi \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$, slik at $f \simeq 10^{14} \text{ Hz}$. Riktig svar: D.

Oppgave 11

Her har vi $f = \omega/2\pi = \sqrt{k/m}/2\pi = \sqrt{4600/(16 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27})}/2\pi \simeq 6.6 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$. Riktig svar: C.

Oppgave 12

Med strekk x_0 er $E = U = kx_0^2/2$. Med maksimal hastighet v er $E = K = mv^2/2$. dermed: $v = x_0\sqrt{k/m} = x_0\omega$. Riktig svar: A.

Oppgave 13

Vi har $x = x_0 \sin \omega t$, $v = \omega x_0 \cos \omega t$ og $a = -\omega^2 x_0 \sin \omega t$. Dermed er

$$(v/\omega)^2 + (a/\omega^2)^2 = x_0^2,$$

dvs

$$x_0 = \sqrt{(v/\omega)^2 + (a/\omega^2)^2}.$$

Riktig svar: D.

Oppgave 14

Avlesning fra figuren gir uten videre at $x(0) = 0.6 \text{ m}$, og at $\dot{x}(0) > 0$. Bare alternativ C kan stemme med dette. Riktig svar: C.