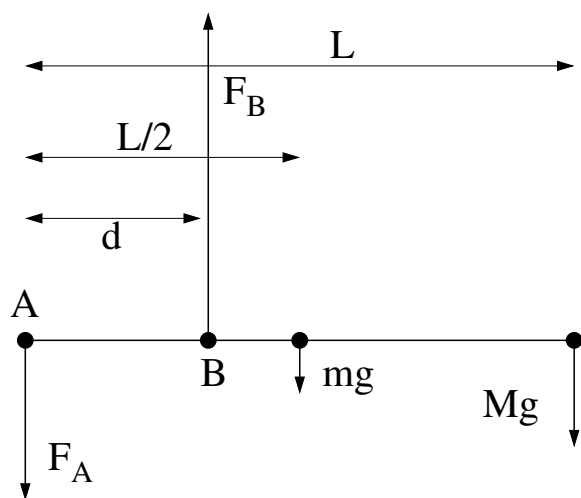


**TFY4104/TFY4125 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.**  
**Løsningsforslag til øving 6.**

**Oppgave 1**



Stupebrettet er i ro, dvs vi har statisk likevekt. Det betyr at summen av alle krefter i vertikal retning er null og at dreiemomentet om enhver akse er lik null. Vi ser da umiddelbart at kraften  $F_A$  er rettet nedover for å gi null dreiemoment om B. Vi ser videre at kraften  $F_B$  er rettet oppover for å gi null dreiemoment om A.

a) Vi velger her først å beregne dreiemomentene om A. Kraften  $F_A$  har da null arm og dermed null dreiemoment. Dreiemomentene pga tyngdekraftene er negative siden de prøver å dreie *med klokka* om A. Tyngdekraften for stupebrettet angriper i tyngdepunktet som ligger i avstand  $L/2$  fra A. Dreiemomentet pga  $F_B$  er positivt siden det prøver å dreie *mot klokka* om A. Totalt dreiemoment om A lik null gir

$$0 = F_A \cdot 0 - mg \frac{L}{2} - MgL + F_B d$$

$$F_B = \frac{gL}{d} \left( M + \frac{m}{2} \right)$$

Riktig svar: C.

b) Kraftbalanse i vertikal retning gir (med positiv retning valgt oppover)

$$0 = -F_A - mg - Mg + F_B$$

$$F_A = F_B - (m + M)g = \frac{gL}{d} \left( M + \frac{m}{2} \right) - (m + M)g$$

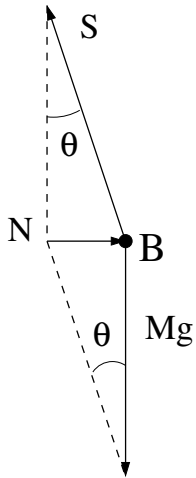
Riktig svar: D.

La oss bruke dreiemomentbalanse om B til å kontrollere at vi har riktig uttrykk for  $F_A$ :

$$\begin{aligned} \tau_B &= F_A d - mg \left( \frac{L}{2} - d \right) - Mg(L - d) \\ &= gL \left( M + \frac{m}{2} \right) - (m + M)gd - mg \left( \frac{L}{2} - d \right) - Mg(L - d) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ser bra ut!

## Oppgave 2



a) Det er tre krefter som virker på ballen, snordraget  $S$ , tyngdekraften  $G = Mg$  og normalkraften fra vegg,  $N$ . Ballen er i ro, dvs i statisk likevekt. Da må f.eks det totale dreiemomentet om ballens tyngdepunkt B være null. Både  $N$  og  $G$  har null arm mhp en akse gjennom B, og bidrar derfor ikke til  $\tau_B$ . Da kan heller ikke  $S$  gi noe dreiemoment om B, og snoras forlengelse må passere gjennom B.

La oss kalle vinkelen mellom vegg og snora for  $\theta$ . Null nettokraft på ballen horisontalt gir da

$$N - S \sin \theta = 0,$$

mens null nettokraft vertikalt gir

$$S \cos \theta - Mg = 0.$$

Siden snoras forlengelse går gjennom B, har vi

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{(L+R)^2 - R^2}}{L+R} = \frac{\sqrt{L(L+2R)}}{L+R}$$

og

$$\tan \theta = \frac{R}{\sqrt{L(L+2R)}},$$

slik at

$$S = \frac{Mg}{\cos \theta} = Mg \frac{L+R}{\sqrt{L(L+2R)}}$$

og

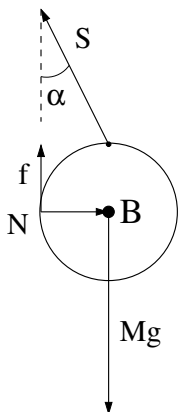
$$N = S \sin \theta = Mg \tan \theta = Mg \frac{R}{\sqrt{L(L+2R)}}.$$

Riktig svar: A.

Hvis snora er veldig lang,  $L \gg R$ , er  $S \simeq Mg$  og  $N \simeq 0$ . Det er rimelig for en ball som henger i ei praktisk talt vertikal snor. Hvis snora er kort,  $L \ll R$ , blir både  $S$  og  $N$  store, og tilnærmet lik

$$S \simeq N \simeq Mg \sqrt{\frac{R}{2L}}.$$

Eksempelvis blir  $S = N = 10Mg$  hvis  $L = R/200$ . (F.eks ball med radius 10 cm og snor med lengde 0.5 mm.) Litt friksjon mellom ball og vegg vil endre på dette.



b) La oss her kalle vinkelen mellom vegg og snor for  $\alpha$ . Null dreiemoment om B gir da

$$S \sin \alpha \cdot R - f \cdot R = 0,$$

dvs

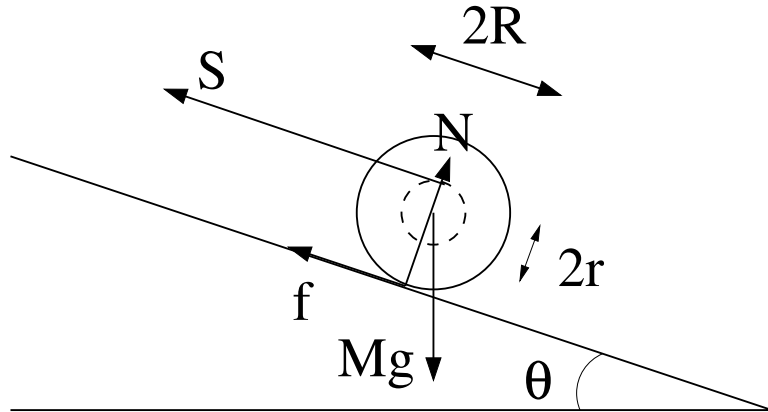
$$f = S \sin \alpha.$$

Maksimal friksjonskraft er  $f_{\max} = \mu N$ . Null nettokraft horisontalt gir da

$$N = S \sin \alpha = f = \mu N,$$

dvs  $\mu = 1$ , som akkurat gjør det mulig å ha snorfestet øverst på ballen. Riktig svar: B. (En mye enklere løsning finnes ved å bruke snoras festepunkt som referansepunkt. Da har  $f$  og  $N$  like stor arm,  $R$ , slik at  $f = N$  og  $\mu = 1$  følger umiddelbart.)

### Oppgave 3.



a) Her har vi fire ukjente:  $\theta_0$ ,  $S$ ,  $f$ ,  $N$ . Dette krever fire ligninger. Når snella holdes i ro av snora og friksjonen, gjelder N1:

$$\text{Normalt skråplanet: } \sum F_{\perp} = 0 \Rightarrow N = Mg \cos \theta \quad (\text{I})$$

$$\text{Langs skråplanet: } \sum F_{\parallel} = 0 \Rightarrow Mg \sin \theta = f + S \quad (\text{II})$$

der  $f$  er friksjonskrafta.

$$\text{N1 for rotasjon (mhp snellas massesenter): } \sum \tau = 0 \Rightarrow S r = f R \quad (\text{III})$$

Statisk friksjonskraft kan ligge mellom null og en øvre grense:

$$f \leq \mu_s N = \mu_s Mg \cos \theta \quad (\text{IV})$$

Ved grensa  $\theta = \theta_0$  – dvs der hvor snella akkurat glipper fra underlaget og begynner å rulle/slure – er friksjonskraften lik det maksimale:  $f = \mu_s Mg \cos \theta_0$ .

Ligning (III) gir  $S = (R/r)f$ , som innsatt i ligning (II) gir

$$Mg \sin \theta_0 - f - (R/r)f = 0.$$

Innsetting av maksimalverdien av  $f$  gir en ligning for  $\theta_0$ :

$$Mg \sin \theta_0 = \mu_s Mg \cos \theta_0 (1 + R/r) \Rightarrow \tan \theta_0 = \mu_s (1 + R/r),$$

og dermed

$$\theta_0 = \arctan [\mu_s (1 + R/r)].$$

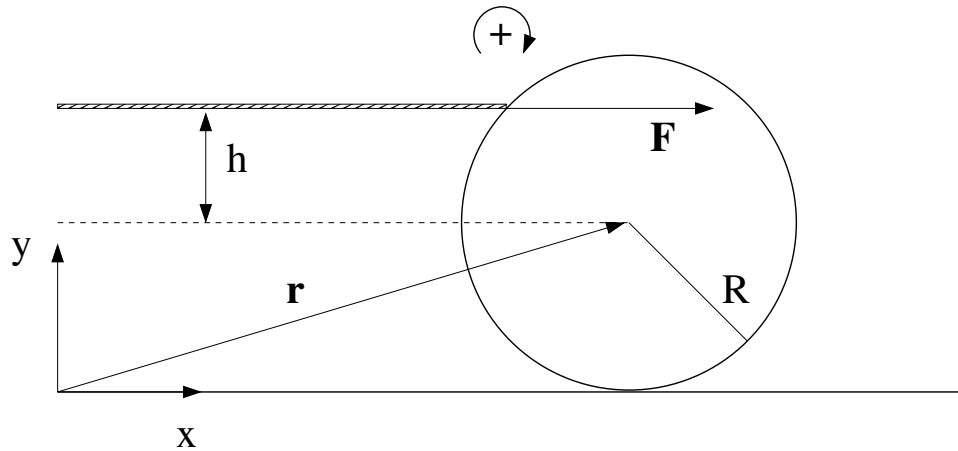
Riktig svar: A.

b) Snorkrafta:

$$\underline{S = \frac{R}{r} f = \frac{R}{r} \mu_s Mg \cos \theta_0}, \quad \text{Alternative uttrykk: } S = \frac{MgR}{r + R} \sin \theta_0 = Mg (\sin \theta_0 - \mu_s \cos \theta_0).$$

Riktig svar: C.

#### Oppgave 4.



a) Det kortvarige, kraftige støtet gir kula en (lineær) impuls og en dreieimpuls (relativt massesenteret):

$$F\Delta t = M\Delta V = MV_0$$

$$\tau\Delta t = Fh\Delta t = I_0\Delta\omega = I_0\omega_0.$$

Fortegnsvalg: Positiv translasjon i positiv  $x$ -retning og positiv rotasjon med klokka, vist i figuren. Vi har som oppgitt neglisjert friksjonskraftens bidrag i det korte tidsrommet  $\Delta t$ , noe som er rimelig unntatt for slag som er veldig svake. En god snookerspiller kan mobilisere en langt større kraft  $F$  når *det* er hensiktsmessig. Vi eliminerer den ukjente størrelsen  $F\Delta t$  fra de to ligningene, og får derved en relasjon mellom  $V_0$  og  $\omega_0$ ,

$$MhV_0 = I_0\omega_0 \Rightarrow V_0 = \frac{2R^2}{5h}\omega_0 \text{ eller } \underline{\omega_0 = \frac{5h}{2R^2}V_0}. \quad (1)$$

Riktig svar: D.

b) Ren rulling forutsetter at  $V_0 = R\omega_0$ , og denne betingelsen er bare oppfylt når  $h_0/R = +2/5$ . Riktig svar: B.

c) Dersom  $h > 2R/5$ , vil  $\omega_0 > V_0/R$ , dvs kula roterer for fort i forhold til ren rulling. Det innebærer at undersiden av kula glir mot venstre på underlaget, og friksjonskraften vil derfor være rettet mot høyre. Retningen kan også fastlegges ved at friksjonskraften forsøker å oppnå perfekt rulling ved å redusere vinkelhastigheten og øke translasjonshastigheten. Med kinetisk friksjon er  $f = \mu_k N = \mu_k Mg$ ; ingen bevegelse vertikalt, så  $N = Mg$ . Riktig svar: B.

(Dersom  $h < 2R/5$ , er situasjonen den motsatte: Friksjonskraften virker mot venstre og gir kula rotasjonsakselerasjon og translasjonsretardasjon. For  $h < 0$  vil  $\omega_0 < 0$ , dvs kula roterer "feil" vei. Friksjonen virker fortsatt mot venstre, dvs den forsøker å få kula til å rotere rett vei.)

Velger vi referansepunktet (hvor som helst) langs  $x$ -aksen, vil  $\mathbf{r}_f \times \mathbf{f} = 0$ , der  $\mathbf{r}_f$  er  $\mathbf{f}$ 's angrepspunkt, som er i kontaktpunktet mellom kule og bord. De to vektorene er parallelle. Ingen andre krefter gir noe dreiemoment om origo etter at støtet er avsluttet, og total dreieimpuls relativt origo må derfor være bevart. (Luftmotstanden, som vi har neglisjert, gir selvsagt et ørlite dreiemoment, noe som ødelegger for perfekt dreieimpulsbevarelse.)

## Oppgave 5

a) Mhp aksen gjennom A (normalt papirplanet) har staven et treghetsmoment  $MD^2/3$  (se forelesningene). En ekstra (punkt-)masse  $m$  i avstand  $d$  gir ganske enkelt et ekstra bidrag  $md^2$ , slik at

$$I = \frac{1}{3}MD^2 + md^2.$$

Riktig svar: A.

b) Før sammenstøtet mellom kule og stav er det bare kula som har impuls, slik at

$$\mathbf{p}_i = mv\hat{x}.$$

Riktig svar: B.

c) Før sammenstøtet er det bare kula som har dreieimpuls mhp A, dens *banedreieimpuls* mhp A er

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_i = -d\hat{y} \times mv\hat{x} = mvd\hat{z}.$$

Med impuls i  $x$ -retning bidrar ikke  $x$ -komponenten av  $\mathbf{r}$  til dreieimpulsen. Riktig svar: B.

d) Tyngdekraften som virker på staven og kula i sammenstøtet har ingen arm mhp A. En eventuell kraft fra akslingen i sammenstøtet angriper staven i A og har dermed heller ingen arm mhp A. Da er det ikke noe ytre dreiemoment mhp A som påvirker systemet, og dreieimpulsen mhp A er bevart:  $\mathbf{L}_f = \mathbf{L}_i = mvd\hat{z}$ .

Riktig svar: B.

e) Stav pluss kule er et stivt legeme med treghetsmoment  $I$  og dreieimpuls  $mvd$  mhp A rett etter sammenstøtet. Systemet utfører ren rotasjon om A. Da har vi  $L = I\omega$ , slik at

$$\omega = \frac{\mathbf{L}}{I} = \frac{v/d}{1 + MD^2/3md^2} \hat{z}.$$

Alternativt uttrykt som alternativ D i oppgaveteksten. Riktig svar: D.

## Oppgave 6

a) **C.** Bruk Steiners sats,  $I_1 = I_2 = I_0 + Md^2$  med  $d = R_1 = R_2$ .

b) **C.** I luftlinje i nord-syd-retning er det ca 40 mil mellom Oslo og Trondheim, dvs ca  $4 \cdot 10^5$  m. Dette blir bilimpulsens "arm"  $a$ . Bilen har masse omlag 1000 kg og hastighet østover ca 25 m/s. Dreieimpulsen mhp et sted i Oslo sentrum blir dermed  $L = mva \sim 1000 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 10^5 = 10^{10}$  kg m<sup>2</sup>/s.

c) **A.** Vi har  $\tau = I_0\dot{\omega}$ , N2 for rotasjon om akse gjennom slipesteinens tyngdepunkt. Her er  $\tau = Sr = 20 \cdot 0.25 = 5.0$  i SI-enheter. Dessuten er  $\dot{\omega} = 60/12 = 5.0$ , også i SI-enheter. Dermed må  $I_0$  være lik 1.0, i SI-enheten kg m<sup>2</sup>.

## Oppgave 7

a) Vi antar at Hookes lov,  $F = -kx$ , gjelder for fjæra. Newtons andre lov gir da

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

eller

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

med  $\omega_0^2 = k/m$ . Ligningen har løsning  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ , som gitt i oppgaveteksten. Klossen svinger altså med vinkelfrekvens  $\omega = \sqrt{k/m}$ , og dermed med periode  $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ . Riktig svar: C.

b) og c) Amplituden  $A$  og fasekonstanten  $\phi$  fastlegger vi ved å bruke de oppgitte initialbetingelsene  $x(0) = x_0$  og  $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$ . Vi har

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

slik at

$$x_0 = A \cos \phi$$

og

$$v_0 = -\omega_0 A \sin \phi$$

Herfra er det flere mulige veier å gå. Vi kan for eksempel dele disse to ligningene med hverandre, som gir

$$\phi = -\arctan \frac{v_0}{x_0 \omega_0}$$

og

$$A = \frac{x_0}{\cos \arctan v_0/x_0 \omega_0}.$$

Alternativt kan vi kvadrere de to ligningene og legge dem sammen:

$$1 = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = \frac{v_0^2}{\omega_0^2 A^2} + \frac{x_0^2}{A^2}$$

som gir

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2} = x_0 \sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}$$

og deretter

$$\phi = \arccos \frac{x_0}{A} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}}.$$

Altså er både A og B riktige svar på oppgavene b) og c), dvs C er riktig svar.

d) Siden vi ikke har noe demping i systemet, er den totale energien  $E$  bevart. (Dvs: Vi har et *konservativt* system.) Da kan vi beregne energien ved et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel ved maksimalt utsving, der  $x = x_{\max} = A$  og  $v = 0$ :

$$E = E_p^{\max} = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k \left( x_0^2 + mv_0^2/k \right) = \frac{1}{2} k x_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2$$

Dette gjenkjenner vi som summen av potensiell og kinetisk energi ved  $t = 0$ ,  $E_{p0} + E_{k0}$ , hvilket jo også må tilsvare den totale energien. Riktig svar: C.

e) Skriver vi løsningen på formen  $x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$ , har vi

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 B \sin \omega_0 t + \omega_0 C \cos \omega_0 t$$

og dermed, ved hjelp av  $x(0) = x_0$  og  $\dot{x}(0) = v_0$ ,

$$B = x_0 \quad \text{og} \quad C = v_0/\omega_0$$

Riktig svar: B.

f) Maksimalt utsving:

$$x_{\max} = A = x_0 \sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2} = x_0 \sqrt{1 + E_{k0}/E_{p0}}$$

Maksimal hastighet:

$$v_{\max} = \omega_0 A = \sqrt{\frac{k}{m}} (x_0^2 + mv_0^2/k) = v_0 \sqrt{1 + kx_0^2/mv_0^2} = v_0 \sqrt{1 + E_{p0}/E_{k0}}$$

Med oppgitte tallverdier:

$$E_{p0} = 0.5 \cdot 10 \cdot 0.010^2 = \frac{1}{2000} \quad , \quad E_{k0} = 0.5 \cdot 0.100 \cdot 0.10^2 = \frac{1}{2000}$$

begge i enheten J, ettersom vi kun har brukt SI-enheter underveis. Følgelig er  $x_{\max} = \sqrt{2}x_0 \simeq 1.4$  cm og  $v_{\max} = \sqrt{2}v_0 \simeq 14$  cm/s. Riktig svar: A.

g) Bevegelsesligning for klossen:

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

Her har vi valgt positiv  $y$ -retning nedover. Uten tyngdefelt til stede ( $g = 0$ ) er klossens likevektsposisjon  $y = 0$ . I tyngdefeltet bestemmes den nye likevektsposisjonen  $\Delta y$  ved å sette total kraft lik null, følgelig

$$\begin{aligned} -k\Delta y + mg &= 0 \\ \Delta y &= mg/k \end{aligned}$$

Med ny posisjonsvariabel

$$z = y - \Delta y$$

får vi bevegelsesligningen

$$m\ddot{z} = -k(z + \Delta y) + mg = -kz$$

som betyr at klossen vil svinge harmonisk med vinkelfrekvens  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  omkring likevektsposisjonen  $z = 0$ , dvs  $y = \Delta y = mg/k$ . (Med tallverdiene fra oppgave 1 har vi  $\Delta x = 0.100 \cdot 9.8/10 = 9.8$  cm.) Riktig svar: A.

h) Fra figuren ser vi f.eks. at  $x(0) = 1$  og  $x(5T) = 0.5$ , der  $T$  er svingningens periode. Dermed:

$$\begin{aligned} e^{-5T/\tau} &= e^{-5 \cdot 2\pi/\omega\tau} = 0.5 \\ \Rightarrow \frac{10\pi}{\omega\tau} &= \ln 2 \\ \Rightarrow \omega\tau &= 45 \end{aligned}$$

Riktig svar: D.