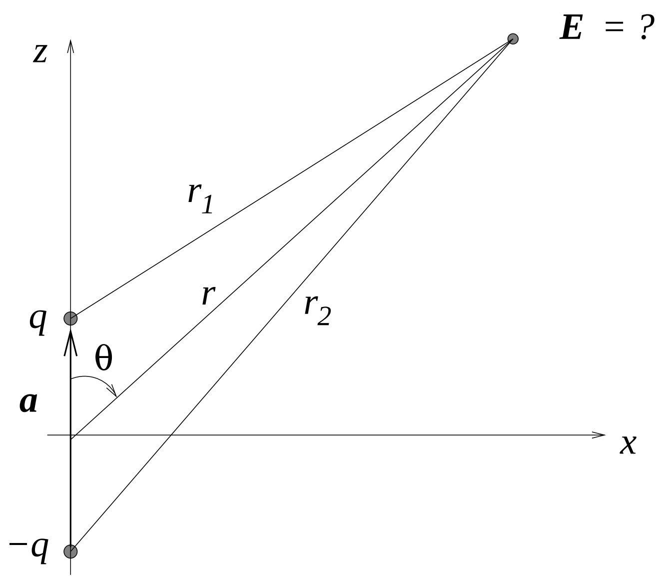
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektromagnetisme
Vår 2009

Øving 4

Veiledning: Mandag 9. februar og fredag 13. (evt 6.) februar
Innleveringsfrist: Fredag 13. februar kl 12.00

Oppgave 1



I forrige øving betraktet vi en elektrisk dipol, bestående av to punktladninger $\pm q$ lokalisert på z-aksen i $z = \pm a/2$. Vi regnet ut det eksakte potensialet $V_e(x, z)$ og fant

$$V_e(x, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - a/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z + a/2)^2}}\right)$$

Deretter viste vi at potensialet i stor avstand fra dipolen ($r \gg a$) blir tilnærmet lik (indeks a for "approximately")

$$V_a(r, \theta) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Her er r avstanden fra origo, dvs dipolens midtpunkt, og θ er vinkelen mellom z-aksen og $\boldsymbol{r}$. (Dipolmomentet er $p = qa$.)

a) I denne første deloppgaven skal vi visualisere dipolpotensialet og sammenligne det tilnærmede uttrykket V_a med det eksakte uttrykket V_e. Dette kan vi gjøre ved å skrive et program i Octave (eller MatLab) som regner ut differansen, eller kanskje like gjerne det prosentvise avviket $\Delta = 100 \cdot |(V_e - V_a)/V_e|$ mellom det eksakte og det tilnærmede uttrykket gitt ovenfor, og som plotter $V_e(x, z)$, $V_a(x, z)$ og "feilen" $\Delta(x, z)$ i tre forskjellige figurer.

Noen tips og kommentarer:

- Konverter først $V_a(r, \theta)$ til $V_a(x, z)$.
- Vurder om du skal plotte potensialene i SI-enhet (V) som funksjon av x og z i en passende enhet, *eller* om du skal skrive om uttrykkene for V_e og V_a og plotte dimensjonsløse potensialer som funksjon av dimensjonsløse koordinater.
- Finn et fornuftig område i (x, z)-planet for plottene dine.
- Det kan være lurt å begrense også "funksjonsaksen" i plottene dine, da potensialet blåser opp i nærheten av ladningene.
- Noen kommandoer og funksjoner som du kan få bruk for: linspace, meshgrid, mesh, axis, caxis, figure, xlabel, ylabel, zlabel. Let opp dokumentasjon for hjelp til å bruke disse. (Google for eksempel gnu octave manual (for Octave) eller mathworks matlab manual (for MatLab).)
- Det viktigste poenget med denne oppgaven er å få litt trening i å bruke programmering i tilknytning til det å jobbe med fysikk. Du vil få flere anledninger senere.

b) Tilbake til papir og blyant! Ta utgangspunkt i det tilnærmede uttrykket $V_a(r, \theta)$ og bestem det elektriske feltet $\boldsymbol{E}(r, \theta) = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}$ i stor avstand fra dipolen.
Det oppgis at gradientoperatoren i kulekoordinater er

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

[Fasit: $E_r = p\cos\theta/2\pi\varepsilon_0 r^3$, $E_\theta = p\sin\theta/4\pi\varepsilon_0 r^3$.]
Kontroller om disse uttrykkene er fornuftige for $\theta = 0$ og for $\theta = \pi/2$. Hva med $r = 0$?

c) På grunn av rotasjonssymmetrien omkring z-aksen kan vi f.eks. anta at vi befinner oss i xz-planet. Bestem det elektriske feltet $\boldsymbol{E}(x, z) = E_x \hat{x} + E_z \hat{z}$ uttrykt i kartesiske koordinater for $r \gg a$. Tips: Ta utgangspunkt i uttrykkene for E_r og E_θ i punkt b). Tegn gjerne opp en figur og finn på den måten sammenhengen mellom koordinatene (x, z) og (r, θ), og feltkomponentene E_x, E_z og E_r, E_θ.
[Fasit: $E_x = 3pxz/4\pi\varepsilon_0(x^2 + z^2)^{5/2}$, $E_z = p(2z^2 - x^2)/4\pi\varepsilon_0(x^2 + z^2)^{5/2}$.]

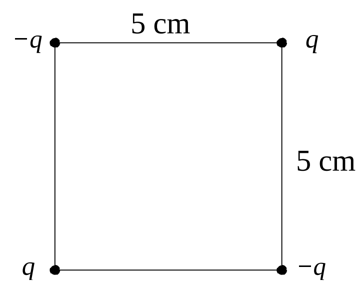
d) En *ideell elektrisk dipol* tilsvarer (formelt) at vi lar avstanden a mellom q og $-q$ gå mot null, uten at dipolmomentet $p = qa$ forsvinner. Det innebærer at vi må la $q \to \infty$ og $a \to 0$ samtidig, og på en slik måte at produktet $p = qa$ blir endelig (dvs verken null eller uendelig). I *praksis* tilsvarer dette at vi befinner oss i stor avstand r fra dipolen, slik vi nettopp har gjort i denne oppgaven.
Det elektriske feltet fra en slik ideell elektrisk dipol kan skrives på såkalt *koordinatfri form*:

$$\boldsymbol{E}_{\text{dipol}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\left(\boldsymbol{p}\cdot\hat{r}\right)\hat{r} - \boldsymbol{p}\right]$$

Vis at dette uttrykket er i samsvar med $\boldsymbol{E}(r,\theta)$ og $\boldsymbol{E}(x,z)$ som du regnet ut i hhv *b*) og *c*).

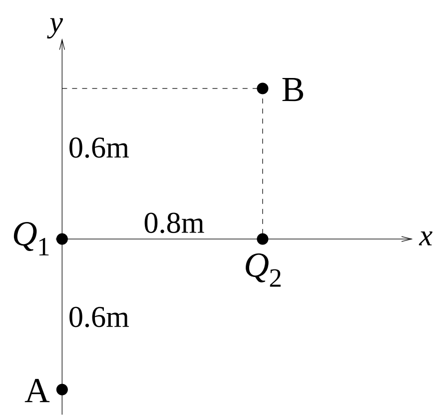
Oppgave 2 (fra tidligere midtsemesterprøver)

a) Fire punktladninger, to positive og to negative ($q = 9\ \mu$C), er plassert i hjørnene på et kvadrat med sidekanter 5 cm, som vist i figuren. Hva er systemets potensielle energi?



A 19 J
B Null
C -7 J
D -38 J

b) To punktladninger $Q_1 = 69$ nC og $Q_2 = -98$ nC er plassert i xy-planet, som vist i figuren. Et elektron flyttes fra punkt A til punkt B. Hvor stor endring gir denne forflytningen i systemets potensielle energi? ("Systemet" = de to punktladningene og elektronet.) (1 eV = $1.6 \cdot 10^{-19}$ J)



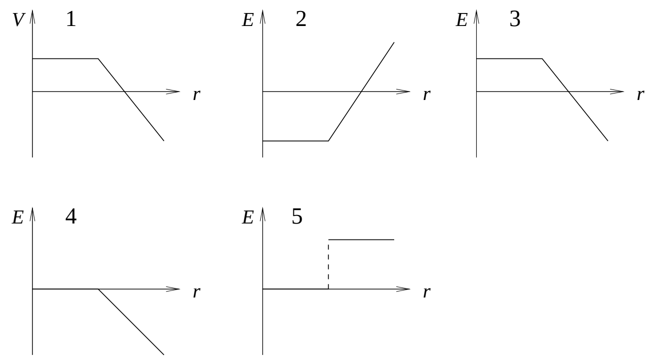
A -1 keV
B -1 eV
C 1 eV
D 1 keV

c) Hvor stor er radien til en (kuleformet) ekvipotensialflate på 50 V med en punktladning 10 nC i sentrum? Null potensial velges uendelig langt unna.

A 1.3 m
B 1.8 m
C 3.2 m
D 5.0 m

d) Hvis potensialet V som funksjon av avstanden r fra en ladningsfordeling er som vist i graf nr 1, hvilken graf viser da det elektriske feltet E som funksjon av avstanden r?

A 2
B 3
C 4
D 5



e) Potensialet i et område er

$$V(x, y, z) = (2\ \mathrm{V/m})x + (3\ \mathrm{V/m})y + (4\ \mathrm{V/m})z$$

Da er x-komponenten av det elektriske feltet i dette området

A –2 V/m
B –3 V/m
C –4 V/m
D –9 V/m