TFY4104 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.

Harmonisk oscillator: Alternative former på løsningen

Den generelle løsningen av ligningen for en harmonisk oscillator,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

kan skrives

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$$

eller

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi).$$

I begge tilfeller har vi to foreløpig ubestemte konstanter, hhv c_1 og c_2 og A og ϕ, som kan fastlegges med to initialbetingelser, f.eks $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$.

Hva må sammenhengene være mellom disse konstantene for at de to løsningene skal være ekvivalente? Det finner vi ut ved å skrive den siste på samme form som den første, ved hjelp av den trigonometriske identiteten

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Med $a = \omega_0 t$ og $b = \phi$ har vi da

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \cos \omega_0 t \cos \phi - A \sin \omega_0 t \sin \phi.$$

Nå må leddene som inneholder $\cos \omega_0 t$ være like, og leddene som inneholder $\sin \omega_0 t$ må være like:

$$\begin{aligned} c_1 \cos \omega_0 t &= A \cos \omega_0 t \cos \phi, \\ c_2 \sin \omega_0 t &= -A \sin \omega_0 t \sin \phi. \end{aligned}$$

Med andre ord,

$$\begin{aligned} c_1 &= A \cos \phi, \\ c_2 &= -A \sin \phi. \end{aligned}$$

Nå er vi i mål dersom vi kjenner A og ϕ og skal bestemme c_1 og c_2. Hvis vi kjenner c_1 og c_2, derimot, må vi løse de to siste ligningene med hensyn på A og ϕ. Da må vi eliminere hhv ϕ og A, for å stå igjen med en ligning som bare inneholder A eller ϕ (samt c_1 og c_2, selvsagt). Divisjon av siste ligning med den første eliminerer A og gir

$$\frac{c_2}{c_1} = -\tan \phi,$$

dvs

$$\phi = -\arctan \frac{c_2}{c_1}.$$

Kvadrering av begge ligninger og addisjon av de to kvadrerte ligningene eliminerer ϕ og gir

$$c_1^2 + c_2^2 = A^2 \left(\cos^\phi + \sin^\phi \right) = A^2,$$

siden $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ for alle verdier av α. Dermed:

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$