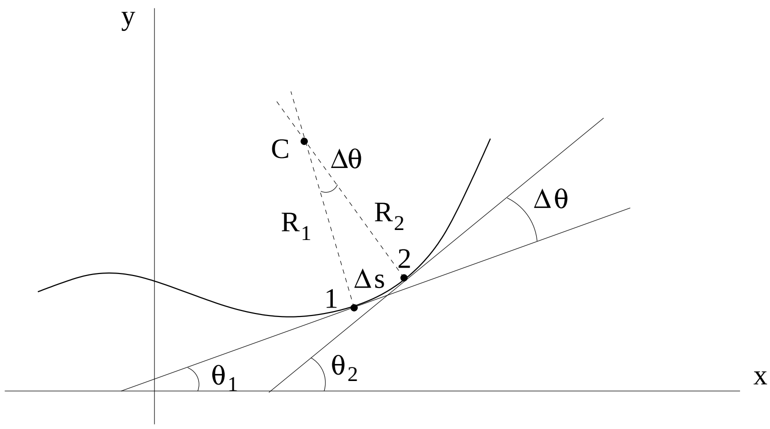
TFY4104 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2017.
Krumningsradius

Akselerasjonen til en partikkel som beveger seg med fart v langs en vilkålig (generelt krum) bane er

$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\hat{r}_{\parallel} + \frac{v^2}{R}\hat{r}_{\perp}.$$

Her er $\hat{r}_{\parallel}$ en enhetsvektor langs banen, i fartsretningen, mens $\hat{r}_{\perp}$ er en enhetsvektor vinkelrett på banen, med retning inn mot sentrum av en tenkt sirkel, med radius R, som tangerer partikkelens bane. Med andre ord, vi må kjenne banens *krumningsradius* R for å bestemme $\boldsymbol{a}$.



Banen $y(x)$ i figuren har en krumning som varierer med x. Vi ønsker å finne et uttrykk for banens krumningsradius R i posisjonen merket med 1. Banen fra 1 til 2, med lengde Δs, kan da oppfattes som en liten del av en sirkel, med radius $R \simeq R_1 \simeq R_2$, og med sentrum i C. Da er omløpt vinkel definert som $\Delta\theta = \Delta s/R$, slik at krumningsradien blir $R = \Delta s/\Delta\theta$. Banens *krumning* er ganske enkelt den inverse av krumningsradien, $K = 1/R = \Delta\theta/\Delta s$. Når omløpt vinkel og buelengde blir tilstrekkelig små, kan vi erstatte Δ med d overalt:

$$R = \frac{ds}{d\theta} \quad , \quad K = \frac{d\theta}{ds}.$$

Da kan vi også ta i bruk Pythagoras:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2}.$$

Kjerneregelen for derivasjon gir

$$K = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}.$$

Fra figuren ser vi at $\tan\theta = dy/dx$, slik at $\theta = \arctan(dy/dx)$. Dermed:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y/dx^2}{1 + (dy/dx)^2},$$

slik at

$$K = \frac{d^2y/dx^2}{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}}.$$

Krumningsradien er da

$$R = \frac{1}{K} = \frac{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}}{d^2y/dx^2}.$$

Vi ser at mens krumningen K alltid har endelig verdi, kan krumingsradien R bli uendelig stor, slik den blir for en rett linje – da er som kjent $d^2y/dx^2 = 0$.