

størrelser og enheter [051 1]

①

SI : Système international d'unités

Grunnenheter :

størrelse	enhet	
lengde	meter (m)	} mekanikk
masse	kilogram (kg)	
tid	sekund (s)	
strøm	ampere (A)	} elmag
temperatur	kelvin (K)	
stoffmengde	mol (mol)	} termodynamikk
lysstyrke	candela (cd)	

Sammensatte enheter :

fart m/s

akselerasjon m/s²

Avledete enheter :

kraft kg m/s² = N (newton)

energi Nm = J (joule)

Siden 20/5-2019 er grunnenhetene definert via fastsatte eksakte verdier for naturkonstanter :

lysfarten i vakuum $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$

elementærladningen $e = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Plancks konstant $h = 6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

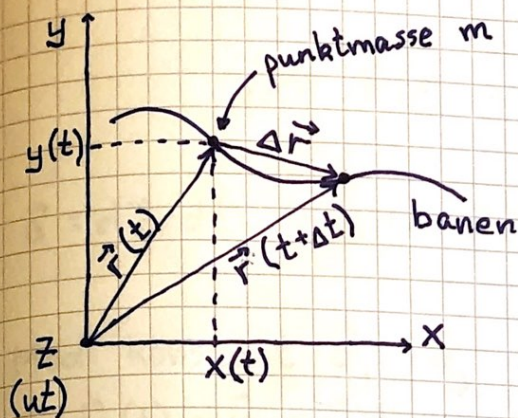
Boltzmanns konstant $k_B = 1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

Avogadros konstant $N_A = 6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Notasjon : $[l] = m$; "enhet for lengde er meter"

Kinematikk

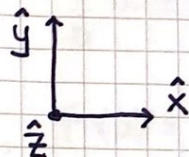
[OS1 (2) 3, 4]



Posisjon ved tid t :

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

Enhetsvektorer (kartesiske):



Notasjon:

- ut
- $\times$ inn

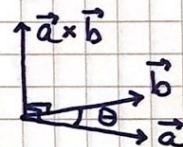
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1 ; [\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \text{ (dimensjonsløse)}$$

$$\text{skalarprodukt: } \hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 ; \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

$$\text{kryssprodukt: } \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \text{ osv (høyrehåndregel)}$$

$$\hat{x} \times \hat{x} = 0$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = a \cdot b \cdot \cos \theta ; |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \theta$$



Forflytning i løpet av Δt : $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$

Hastighet (fart) $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Forflytning pr tidsenhet:}$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} ; \vec{v} \parallel \Delta \vec{r} \text{ (tangent til banen)}$$

Akselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Fartsendring pr tidsenhet:}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} ; \vec{a} \parallel d\vec{v}$$

Komponenter (kartesiske):

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} ; v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \text{ osv}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} ; a_x = d^2x/dt^2 = \ddot{x} \text{ osv}$$

$\vec{r}$ og $\vec{v}$ er integralet av hhv $\vec{v}$ og $\vec{a}$:

③

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

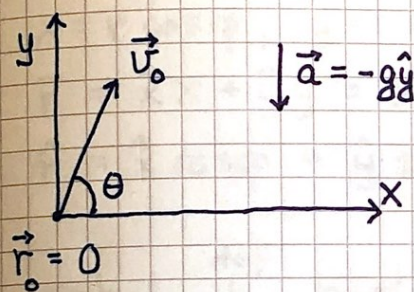
$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

Med konstant $\vec{a}$, og $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2$$

Eks: TIFY4104 5/12-24 nr 3, kast i tyngdefeltet



$$v_0 = 25 \text{ m/s}, \quad \theta = 60^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Hva er t når $y = y_{\max}$?

$$\text{Løsn: } \vec{v} = \vec{v}_0 - gt \hat{y} ; \quad \vec{r} = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \hat{y}$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt = 0 \quad \text{når } y = y_{\max}$$

$$\Rightarrow t = v_0 \sin \theta / g = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 60^\circ / 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{2.2 \text{ s}}}$$

$$\text{Banen: } x(t) = v_0 t \cos \theta \Rightarrow t = x / v_0 \cos \theta$$

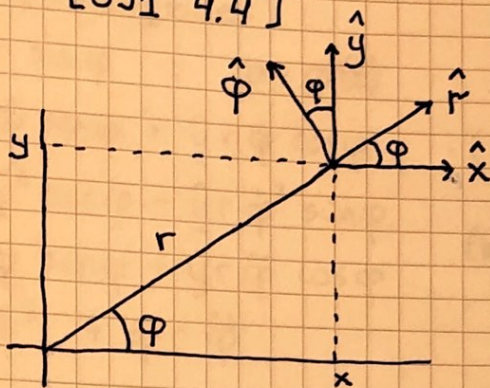
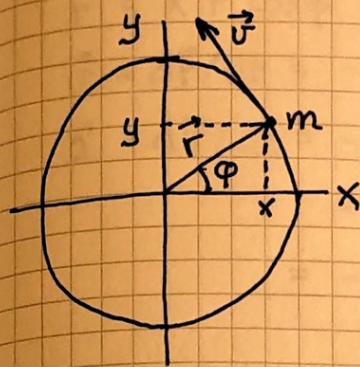
$$y(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) = x \tan \theta - gx^2 / 2 v_0^2 \cos^2 \theta \quad (\text{parabel})$$

Sirkelbevegelse

[051 4.4]

(4)



Polarkoordinater:

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\hat{r}$ ($\varphi > 0$ mot klokka)

Ser fra figuren:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x)$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x}r\cos\varphi + \hat{y}r\sin\varphi = \hat{r}r$$

$$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi, \quad \hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi = d\hat{r}/d\varphi$$

vinkel $\stackrel{\text{def}}{=} \text{buelengde} / \text{radius}$



$$d\varphi = ds/r; \quad [\varphi] = 1 \text{ (evt rad)}$$

vinkelfart $\stackrel{\text{def}}{=} \text{omløpt vinkel pr tidsenhet}$

$$\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi}; \quad [\omega] = 1/s \text{ (evt rad/s)}$$

vinkelakselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=} \text{endring i vinkelfart pr tidsenhet}$

$$\alpha = d\omega/dt = \dot{\omega} = d^2\varphi/dt^2 = \ddot{\varphi}; \quad [\alpha] = 1/s^2 \text{ (evt rad/s}^2\text{)}$$

Ser fra figuren: $\vec{v} \parallel \hat{\varphi}; \quad \vec{v} \perp \vec{r}$

$$v = |\vec{v}| = \frac{d|\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{r d\varphi}{dt} = r\omega \quad \left. \vphantom{\frac{ds}{dt}} \right\} \Rightarrow \vec{v} = r\omega \hat{\varphi}$$

Praktisk å la vektoren $\vec{\omega}$ peke langs rotasjonsaksen.

Da er $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. ($\vec{\omega} = \omega \hat{z}$; rot. mot klokka i xy-planet)

Akselerasjon i sirkelbevegelse:

(5)

$$\vec{r} = \hat{x} r \cos\varphi + \hat{y} r \sin\varphi \quad ; \quad \varphi = \varphi(t)$$

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt = -\hat{x} r \dot{\varphi} \sin\varphi + \hat{y} r \dot{\varphi} \cos\varphi$$

(kjerneregul)

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt = -\hat{x} r \ddot{\varphi} \cos\varphi - \hat{y} r \ddot{\varphi} \sin\varphi$$

$$- \hat{x} r \dot{\varphi} \sin\varphi + \hat{y} r \dot{\varphi} \cos\varphi$$

(kjerne- og produktregel)

$$= -\hat{r} r \dot{\varphi}^2 + \hat{\varphi} r \ddot{\varphi}$$

Sentripetalaks: $\vec{a}_{\perp} = -\hat{r} r \omega^2 = -\hat{r} v^2/r$

inn mot sirkelens sentrum

Baneaks: $\vec{a}_{\parallel} = \hat{\varphi} r \alpha = \hat{\varphi} r \dot{\omega} = \hat{\varphi} \dot{v}$

tangentielt til sirkelbanen

Uniform sirkelbevegelse når ω og v er konstante.

Da er $a_{\parallel} = 0$ og $a = a_{\perp} = v^2/r$

Periode $\stackrel{\text{def}}{=}$ tid pr omløp

$$T = 2\pi r/v = 2\pi/\omega \quad ; \quad [T] = s$$

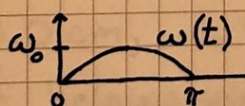
Frekvens $\stackrel{\text{def}}{=}$ antall omløp pr tidsenhet

$$f = 1/T = \omega/2\pi \quad ; \quad [f] = 1/s = \text{Hz (hertz)}$$

TFY 4104 12/8-25 nr 3-6:

Karusell, start ved $t=0$, stopp ved $t \approx 157$ s. Vinkelfart

$$\omega(t) = \omega_0 \sin \omega_1 t \quad ; \quad \omega_0 = 0.20 \text{ rad/s}, \quad \omega_1 = 0.020 \text{ rad/s}$$

③ $\omega_{\max} = ?$  $\Rightarrow \omega_{\max} = \omega_0 = \underline{\underline{0.20 \text{ rad/s}}}$

④ Oles fart 4.0 m fra sentrum, ved $t = 20$ s?

$$v = r\omega = 4.0 \cdot 0.20 \cdot \sin(0.4) \text{ m/s} = 0.31 \text{ m/s} = \underline{\underline{31 \text{ cm/s}}}$$

⑤ Oles akselerasjon ved $t = 78.5$ s? $a_{\parallel} \approx r\omega_0\omega_1 \cos(\pi/2) = 0$

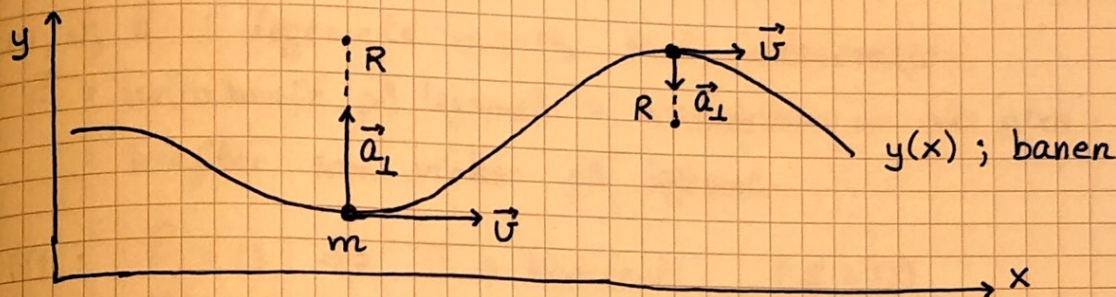
$$\Rightarrow a = a_{\perp} = r\omega_0^2 \sin^2(\pi/2) = 4.0 \cdot 0.20^2 \text{ m/s}^2 = \underline{\underline{0.16 \text{ m/s}^2}}$$

⑥ Antall runder totalt?

$$N = \phi/2\pi = (2\pi)^{-1} \int_0^{157} \omega(t) dt = \frac{\omega_0}{2\pi\omega_1} \Big|_0^{157} (-\cos \omega_1 t) = \frac{\omega_0}{\pi\omega_1} = \underline{\underline{3.2}}$$

Beregelse langs krum bane:

(6)



R = banens krumningsradius = radius i sirkel som best tangerer banen $y(x)$

Utleidet i notater 2019, s. 10-11:

$$R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|} \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

- $a_{\perp} = v^2/R$, inn mot sirkelens sentrum
- $y' = 0$ i topp- og bunnpunkter $\Rightarrow R = |y''|^{-1}$
- $y'' = 0$ i vendepunkter $\Rightarrow R \rightarrow \infty$, $a_{\perp} = 0$
- banens helningsvinkel:

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

TFY4104 12/8-25 nr 7:

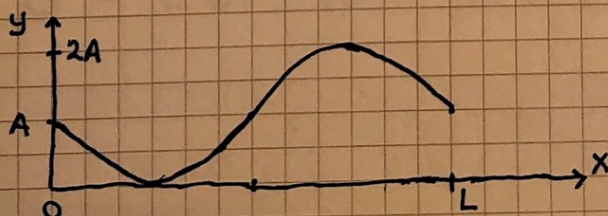
$$y(x) = A [1 - \sin(2\pi x/L)]$$

$$A = 10.0 \text{ cm}, \quad L = 140.0 \text{ cm}$$

Hva er helningsvinkelen i $x = 0$?

$$\text{Løsn: } dy/dx = -A \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot \cos(2\pi x/L)$$

$$\Rightarrow |\theta(0)| = \arctan(2\pi A/L) = \arctan\left(\frac{\pi}{7}\right) = \underline{\underline{24^\circ}}$$



Newtons lover

[OS1 5, 6]

(7)

$m, \vec{v}, \vec{a}$: legemets masse, fart, akselerasjon

$\vec{F}$ = netto kraft på legemet = vektorsum av alle ytre krefter som virker på legemet

N1: $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant} \quad (\vec{a} = 0)$

N2: $\vec{F} = m\vec{a}$

N3: Krefter er vekselvirkninger mellom legemer.

Hvis legeme 1 virker på legeme 2 med kraft $\vec{F}_{12}$,
virker legeme 2 på legeme 1 med kraft $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

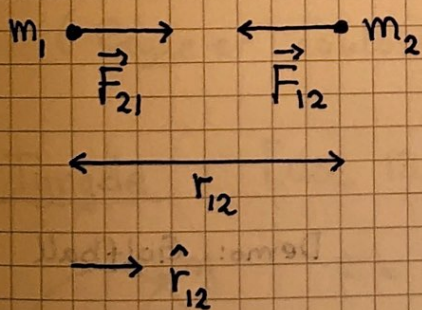
$[F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$ (newton)

Impuls (= bevegelsesmengde) : $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{F} = m d\vec{v}/dt = d(m\vec{v})/dt = d\vec{p}/dt$$

Fundamentale naturkrefter [OS1 13.1 ; OS2 5.3]

- Gravitasjon (tyngdekraft): Svak tiltrekning mellom masser



Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

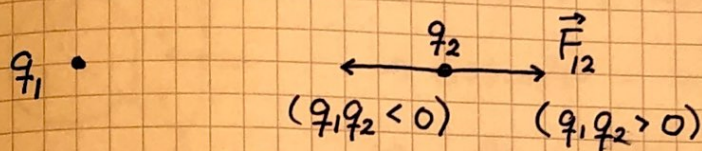
Den universelle gravitasjonskonstanten:

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2$$

- Coulombkraft (elektrostatisk kraft):

(8)

Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger



Coulombs lov:
$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

$[q] = C$ (coulomb)

Vakuumperrmittiviteten: $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

- Kjernekrefter: Svake og sterke krefter med kort rekkevidde. Årsak til radioaktivitet og stabilitet av atomkjerner.

Viktig i mekanikk er:

- Tyngdekraften fra jorda, og mellom himmellegemer
- Kontaktkrefter: Normalkraft og friksjonskraft. (Begge er coulombkrefter.)

Tyngde [OS1 13.2, 5.4]



$F = GmM/R^2 = \text{tyngden av } m$

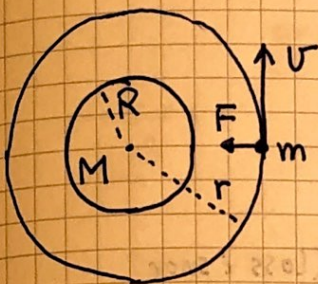
Jorda: $M \approx 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R \approx 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$

$\Rightarrow F = mg$; $g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2 =$
tyngdens akselerasjon ved jordas overflate

Fritt fall når mg er eneste kraft på m ; N2 gir da $a=g$

Satellittbaner: Sirkel omkring jordas sentrum

⑨



$$F = GMm/r^2, \quad a = v^2/r, \quad F = ma$$

$$\Rightarrow GMm/r^2 = mv^2/r$$

$$\Rightarrow \underline{v^2 r = GM} \quad (r > R)$$

Eks 1: Hvor høyt over ekrator, og hvor fort, går en geostasjonær satellitt?

Løsn 1: Må ha periode $T \approx 24 \text{ h} = 2\pi/\omega = 2\pi r/v$. Da har vi to ligninger for r og v , med entydig løsning:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 r = GM \Rightarrow r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx \underline{4.22 \cdot 10^7 \text{ m}}$$

$$\text{Og dermed } v \approx \underline{3 \text{ km/s}} \quad (h = r - R \approx 36000 \text{ km})$$

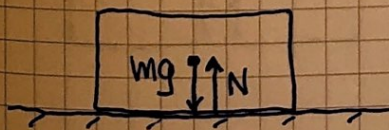
Eks 2: Hva er minimum tidsforsinkelsen ved kommunikasjon via en geostasjonær satellitt?

Løsn 2: Signalets fart er $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; strekningen er minst $2 \cdot h \approx 7.2 \cdot 10^7 \text{ m}$

$$\Rightarrow \Delta t \geq 2h/c \approx \underline{0.24 \text{ s}}$$

Kontaktkrefter [051 5.6, 6.2, 6.4, 14.3]

Normalkraft: N = normalkomponenten av kontaktkraften mellom to legemer

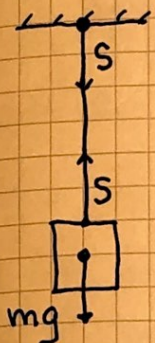


Hvis klossen ligger i ro:

$$N = mg \quad \text{pga } N \uparrow$$

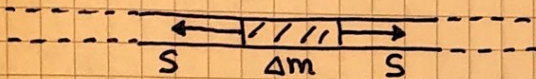
Snorkraft: S = kraft fra snora på legemet som snora er festet til

(10)

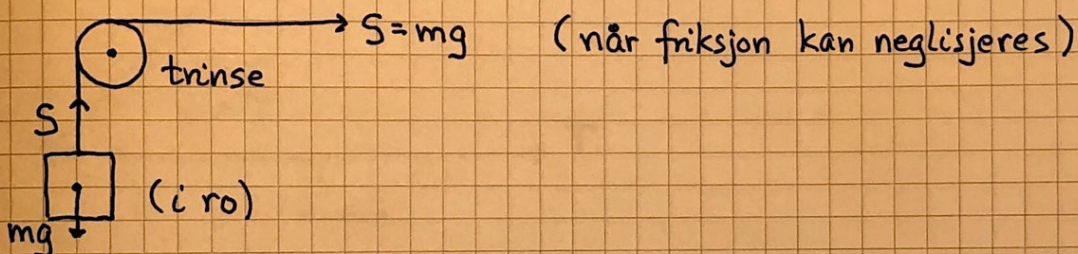


Hvis klossen i ro: $S = mg$ (pga N1)

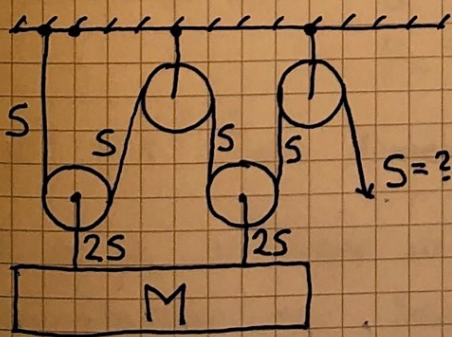
Har konstant S i lette utstrekke snorer:



Trinse: Endrer retningen på $\vec{S}$



Talje:



N1 for kassa:

$$4S = Mg$$

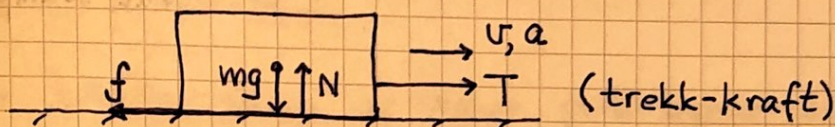
$\Rightarrow$ Kan løfte kassa med
kraft $S \geq \frac{1}{4}Mg$

Friksjon [OS1 6.2]

⑪

f = tangentialkomponenten av kontaktkraften mellom to legemer; $\vec{f}$ motsetter seg (forsøk på) relativ bevegelse

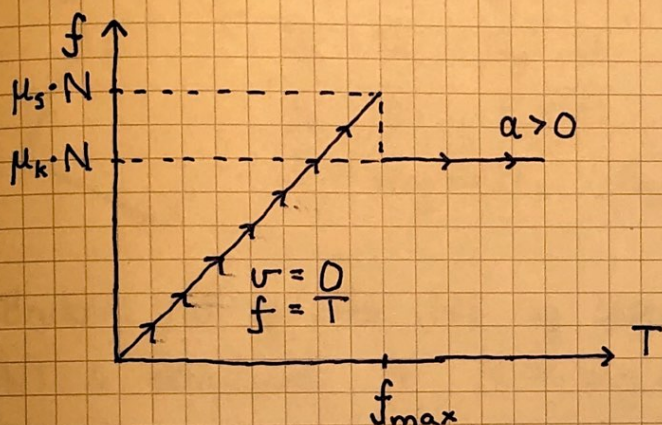
Empirisk:



$$N \perp \text{bordet} \Rightarrow N = mg$$

$$N \parallel \text{---} \Rightarrow T - f = ma \Rightarrow f = T - ma$$

Målinger av m , T og a gir:

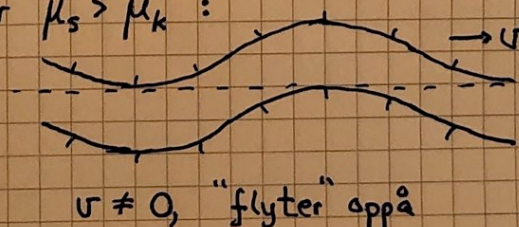
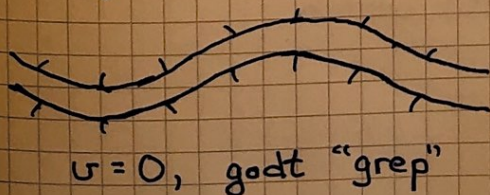


Statisk friksjon: $f \leq f_{\max} = \mu_s N$
 μ_s = statisk friksjonskoeffisient

Kinetisk friksjon: $f = \mu_k N$
 μ_k = kinetisk friksjonskoeffisient

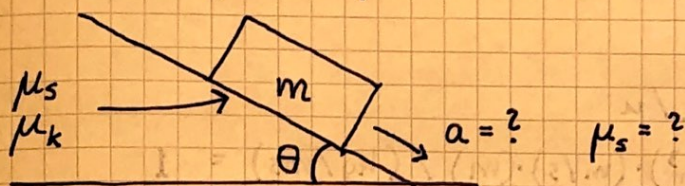
$[\mu] = 1$ (dvs dimensjonsløs)

μ_s og μ_k avhenger av type materialer og hvor glatte overflatene er. Som regel er $\mu_s > \mu_k$:

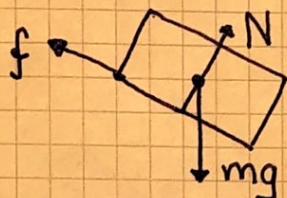


Eks : Masse på skråplan

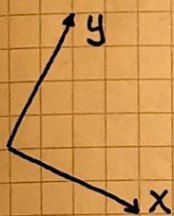
(12)



Finner ytre krefter på m og tegner fritt-legeme-diagram:



Velger koordinatsystem og dekomponerer kreftene:



$$N_x = 0, \quad N_y = N$$

$$f_x = f, \quad f_y = 0$$

$$G_x = mg \sin \theta, \quad G_y = mg \cos \theta$$

Bruker $N1$ og/eller $N2$ og løser ligningene:

$$N1 \perp \text{skråplanet} \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$N2 \parallel \text{---} \Rightarrow mg \sin \theta - f = ma$$

$$\text{Statisk } (v=0, a=0): f = mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta = f_{\max}$$

$$\text{Kinetisk: } f = \mu_k mg \cos \theta \Rightarrow \underline{a = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}$$

Begynner å gli ved helningsvinkel $\theta_{\max}$ fastlagt ved

$$f = f_{\max}$$

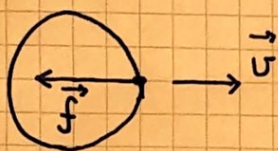
$$\Rightarrow mg \sin \theta_{\max} = \mu_s mg \cos \theta_{\max}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu_s = \tan \theta_{\max}}}$$

Friksjon i fluider

[OS1 6.4, 14.7]

(13)



Omgivende fluid (gass eller væske):

Massetetthet ρ

Dynamisk viskositet μ

Luft : $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$

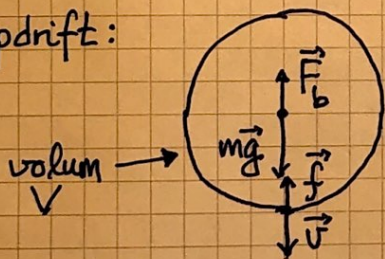
Vann : $\rho = 10^3 \text{ ---}$, $\mu = 10^{-3} \text{ ---}$

Liten u : Ordnet, laminnær strømming av fluidet rundt legemet, $\vec{f} = -k\vec{u} = -k u \hat{u}$.

Kule, radius r : $k = 6\pi\mu r$ (Stokes' lov)

Stor u : Uordnet, turbulent strømming av fluidet, $\vec{f} = -\frac{1}{2} \rho A C_d u^2 \hat{u}$; C_d = drag-koeffisient, mindre jo mere aerodynamisk form ; A = legemets tverrsnitt målt på tvers av $\vec{u}$. Kule, radius r : $A = \pi r^2$, $C_d \approx 0.5$

Oppdrift:



$\vec{F}_b = -\rho V \vec{g}$ = tyngden av
fortrengt fluidmengde
(Arkimedes' prinsipp)

Terminalfart : Max fart ved fall i tyngdefeltet, u_t

$$N1 \Rightarrow \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{f} + \vec{F}_b = m\vec{g}$$

Hvis legemet har mye større massetetthet enn fluidet, kan som regel oppdrift neglisjeres. Da er $f(u_t) = mg$.

Men generelt : $f(u_t) = mg - \rho V g = (\rho_s - \rho) V g$

der

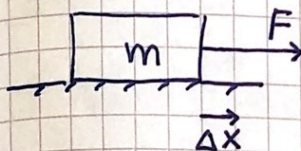
ρ_s = legemets massetetthet

Arbeid og energi [OS1 7, 8]

(14)

Arbeid [OS1 7.1]

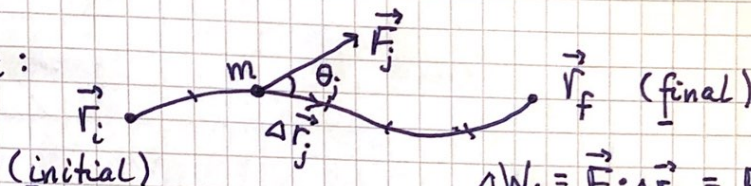
arbeid $\stackrel{\text{def}}{=}$ kraft $\cdot$ forflytning



$$\Delta W = F \cdot \Delta x = \text{arbeid utført av } F \text{ på } m$$

$$[W] = N \cdot m = J \quad (\text{joule})$$

Generelt:



$$\Delta W_j = \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j = F_j \Delta r_j \cos \theta_j$$

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ på m når m flytter seg fra posisjon $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$

Effekt [OS1 7.4]

effekt $\stackrel{\text{def}}{=}$ utført arbeid (evt: overført energi) pr tidsenhet

$$\underline{P} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \underline{\vec{F} \cdot \vec{v}}$$

$$[P] = J/s = W \quad (\text{watt})$$

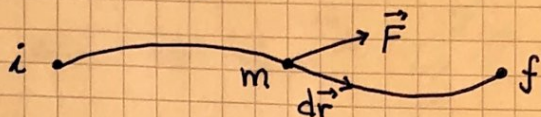
Eks: Midlere "strømforbruk" (elektrisk energi) pr år pr husstand i Norge var ca 15700 kWh i 2023 (SSB).
Hvor mange joule er dette?

$$\text{Løsning: } 1.57 \cdot 10^4 \cdot 10^3 \frac{J}{s} \cdot 3600 s = 56.52 \cdot 10^9 J = 56.52 \text{ GJ}$$

(G = giga = 10^9)

Kinetisk energi [OS1 7.2]

(15)



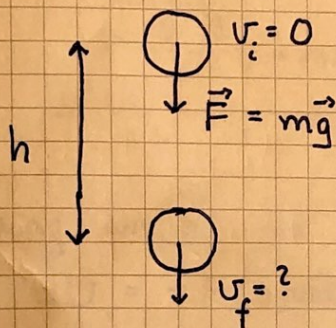
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} m d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

$$\Rightarrow W = \int_i^f dW = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Kinetisk energi: $K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$

$$\Rightarrow \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K} \quad (\text{work-energy theorem})$$

Eks:



$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot h = mgh$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2$$

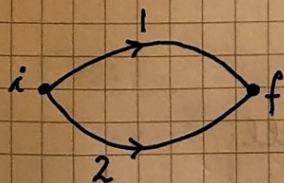
$$W = \Delta K \Rightarrow \underline{\underline{v_f = \sqrt{2gh}}}$$

Konservative krefter. Potensiell energi [OS1 8.1-8.4]

Med unntak av kinetisk friksjon er kreftene i dette kurset konservative, definert ved at

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\oint: \text{integral rundt lukket kurve})$$

Da er arbeidet W uavhengig av veien:



$$W_1 - W_2 = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 - \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2$$

$$= \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2$$

$$= \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \underline{\underline{W_1 = W_2}}$$

Forskjell i potensiell energi U , med konservativ $\vec{F}$: (16)

$$\Delta U = U_f - U_i \stackrel{\text{def}}{=} - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

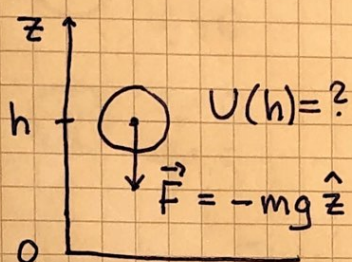
Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

Vi kan sette $U=0$ hvor vi vil. Anta $U=0$ i posisjon $\vec{r}_0$.

Da er pot. energi i posisjon $\vec{r}$:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Eks:



Velger $U(0) = 0$:

$$U(h) = - \int_0^h F dz = \underline{\underline{mgh}}$$

Beregning av $\vec{F}$ fra U :

$$1D: dU = -F(z)dz \Rightarrow F(z) = -dU/dz$$

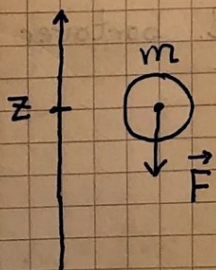
$$3D: dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$

Gradienten til en skalar funksjon $f(x,y,z)$:

$\nabla f = \left\{ \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right\} f$ = en vektor som peker i den retningen f øker raskest, med absoluttverdi lik endringen i f pr lengdeenhet

Dermed: $\vec{F} = -\nabla U$ peker i retningen U økar raskest

Eks:



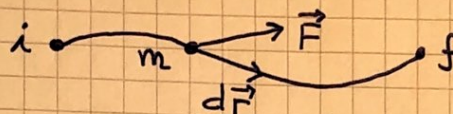
$$U(z) = U(0) + mgz$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = mg$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{F} = -mg\hat{z}}}$$

Energibevarelse [OS1 8.3]

(17)



konservativ $\vec{F}$

$$\left. \begin{aligned} \Delta K &= K_f - K_i = W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \Delta U &= U_f - U_i = - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$

$\Rightarrow$ Total mekanisk energi $E = K + U$ er bevart i et kons. system

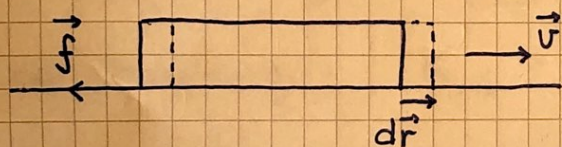
Eks: m  $z_i = h$
 $v_i = 0$

$$K_i = 0, U_f = 0, U_i = mgh, K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = mgh \Rightarrow \underline{\underline{v_f = \sqrt{2gh}}}$$

 $z_f = 0$
 $v_f = ?$

Friksjonsarbeid [OS1 7.1]



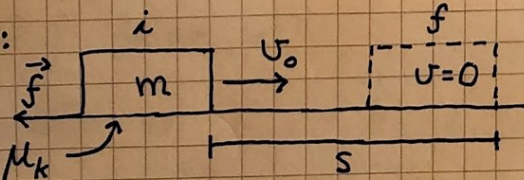
Kinetisk friksjon: $dW_f = \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ alltid

$$\Rightarrow \oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \Rightarrow \vec{f} \text{ ikke konservativ}$$

Mekanisk energi omdannes til termisk energi (varme) m.m.

Statisk friksjon: $d\vec{r} = 0 \Rightarrow dW_f = 0$

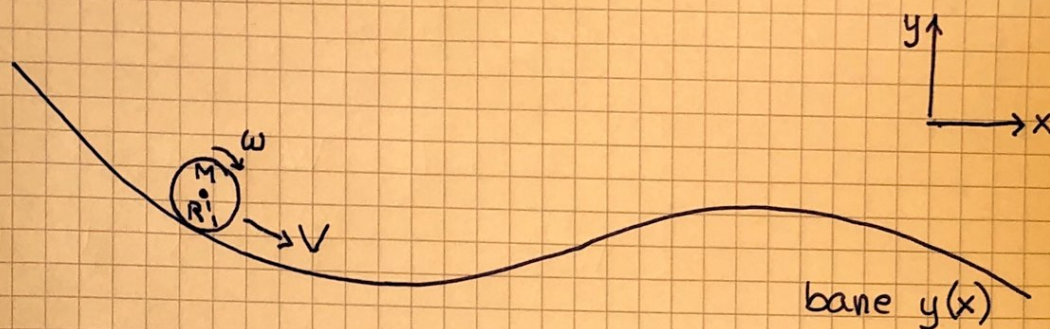
$\Rightarrow$ Mekanisk energi er bevart!

Eks:  $\mu_k = ?$

Løsn: $W_f = f \cdot s = \mu_k N \cdot s = \mu_k mgs$; $\Delta K = K_o = \frac{1}{2}mv_o^2$
 $\Rightarrow \mu_k mgs = mv_o^2/2 \Rightarrow \underline{\underline{\mu_k = v_o^2/2gs}}$

Lab: Rulling av kule på krum bane

(18)



Ren rulling $\Rightarrow$ Kula glir ikke $\Rightarrow$ Statisk friksjon
 $\Rightarrow$ Mekanisk energi er bevart

Pot. energi: $U(y) = Mgy$; dersom $U(0) = 0$

Kin. energi: $K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}}$

Translasjonsenergi: $K_{\text{trans}} = \frac{1}{2}MV^2$
Rotasjonsenergi: $K_{\text{rot}} = \frac{1}{5}MV^2$ } $\Rightarrow K = \frac{7}{10}MV^2$

Anta $V = 0$ i en starthøyde y_0

Da er farten $V(y)$ i høyde y bestemt av:

$$U(y) + \frac{7}{10}MV(y)^2 = U(y_0)$$

$$\Rightarrow \underline{V(y) = \sqrt{\frac{10}{7}g(y_0 - y)}}$$

Vi skal finne ut:

- Hvorfor er $K_{\text{rot}} = \frac{1}{5}MV^2$ for kompakt kule?
- Hva er friksjonskraften f og normalkraften N på kula underveis?

Og mye mer!

Stive legemer og rotasjon

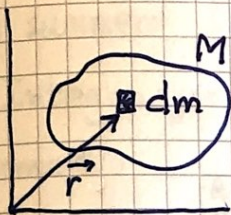
(19)

Massesenter [OS1 9.6]

Med N punktmasser m_i i posisjoner $\vec{r}_i$ ($i=1,2,\dots,N$)

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i ; M = \sum_{i=1}^N m_i = \text{total masse}$$

Med kontinuerlig massefordeling:



$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm ; M = \int dm$$

Masseelement:

1D: $dm = \lambda \cdot dl$ ($\lambda = \text{masse pr lengdeenhet}$)

2D: $dm = \sigma \cdot dA$ ($\sigma = \text{--- flate ---}$)

3D: $dm = \rho \cdot dV$ ($\rho = \text{--- volum ---}$)

$dl = \text{lengdeelement}$; $dA = \text{flateelement}$; $dV = \text{volumelement}$

Hvis massefordelingen er uniform (konstant λ, σ eller ρ):

$$dm = (M/L)dl ; dm = (M/A)dA ; dm = (M/V)dV$$

Eks 1: $m_i = i \cdot m_0$; $x_i = 2y_i = i \cdot a$; $i=1,2,3$. $\vec{R}_{CM} = ?$

$R_{CM} = ?$

Løsning 1:

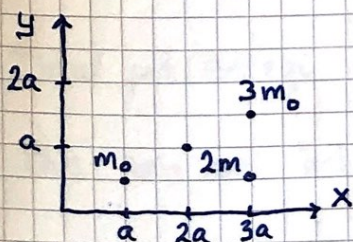
$$\vec{R}_{CM} = X_{CM} \hat{x} + Y_{CM} \hat{y}$$

$$M = 6m_0$$

$$X_{CM} = (6m_0)^{-1} (1+4+9)m_0 a = \frac{7}{3} a$$

$$Y_{CM} = (6m_0)^{-1} (\frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2})m_0 a = \frac{7}{6} a$$

$$R_{CM} = (X_{CM}^2 + Y_{CM}^2)^{1/2} \approx 2.6 a$$



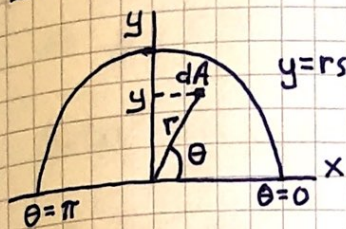
Eks 2: Halv rund skive

(20)



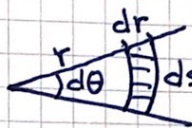
Radius R . $Y_{CM} = ?$ (Symmetri $\Rightarrow X_{CM} = 0$)

Løsn 2: $Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA$; $A = \frac{1}{2} \pi R^2$



$$y = r \sin \theta$$

Flatelement i polarkoordinater:



$$dA = dr \cdot r d\theta$$

Må summere (integrere) over hele skiva

$\Rightarrow$ Integrasjonsgrenser blir: $0 \leq r \leq R$; $0 \leq \theta \leq \pi$

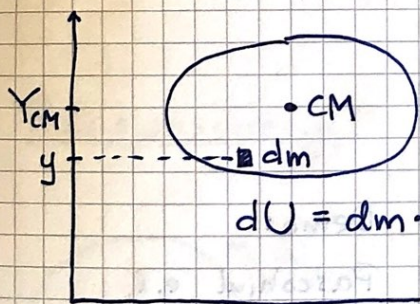
Dermed:

$$Y_{CM} = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta \cdot r d\theta dr$$

$$\int_0^R r^2 dr = \frac{1}{3} R^3 ; \quad \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \left[-\cos \theta \right]_0^\pi = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow Y_{CM} = \frac{4}{3\pi} R \approx \underline{0.42 R}$$

Eks 3: Potensiell energi til massesystem i tyngdefeltet



$$M = \int dm$$

$$dU = dm \cdot g \cdot y \quad (\text{med valget } U(0) = 0)$$

Total pot. energi: $U = \int dU = \int g y dm = g M Y_{CM}$

Dus som om hele M er i høyden Y_{CM} !

Tyngdepunkt bevegelsen

[OS1 9.6]

(21)

Vi skal vise at massesenteret (tyngdepunktet; CM) til et system beveger seg som om hele massen M er i CM og påvirkes av netto ytre kraft på systemet.

Anta N punktmasser $\{m_i\}$ i pos. $\{\vec{r}_i\}$

$$N2 \text{ for } m_i: m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_i}_{\substack{\uparrow \\ \text{ytre kraft} \\ \text{p\aa } m_i}} + \sum_{j \neq i} \underbrace{\vec{F}_{ji}}_{\substack{\uparrow \\ \text{indre kraft fra} \\ m_j \text{ p\aa } m_i}}$$

Legg sammen N2 for alle i :

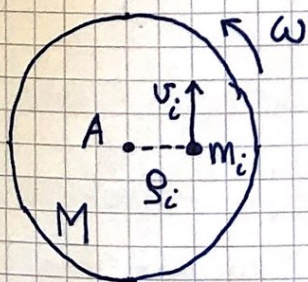
$$VS: \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} M \vec{R}_{cm} = M \ddot{\vec{R}}_{cm}$$

$$HS: \sum_i \vec{F}_i = \vec{F} = \text{netto ytre kraft p\aa systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \dots = 0 \quad (\text{pga N3})$$

$$\Rightarrow \boxed{M \ddot{\vec{R}}_{cm} = \vec{F}}$$

Rotasjonsenergi. Tregghetsmoment [OS1 10.4, 10.5]



$M = \sum_i m_i = \text{legemets masse}$

$A = \text{rotasjonsaksen } (\perp \text{ p\aa} \text{ p\aa} \text{rplanet})$

$r_i = \text{avstand fra } A \text{ til } m_i$

$v_i = \text{hastigheten til } m_i$

$\omega = \text{legemets vinkelhastighet; felles for hele legemet}$

($\vec{\omega}$ ut av planet)

Rotasjonsenergi:

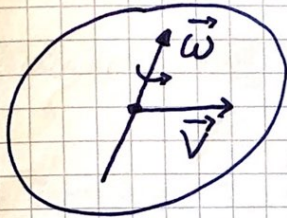
$$K_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_i m_i r_i^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Tregghetsmoment mhp aksen A: $I = \sum_i m_i r_i^2$

Med kontinuerlig massefordeling: $I = \int r^2 dm$

Generell beregelse for stivt legeme:

Translasjon med hastighet $\vec{V}$ kombinert med rotasjon om akse gjennom massesenteret (CM) med vinkelhastighet $\vec{\omega}$



M = total masse

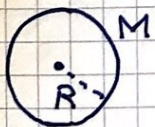
I_o = tregghetsmoment mhp rotasjonsaksen gjennom CM

Total kinetisk energi:

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

[Se notat for bevis]

Eks: Tynn ring eller hul sylinder



$$I_o = \int r^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

Andre objekter som kan rulle: (Oppgitt på formelark)

Kompakt skive/sylinder: $I_o = \frac{1}{2} MR^2$

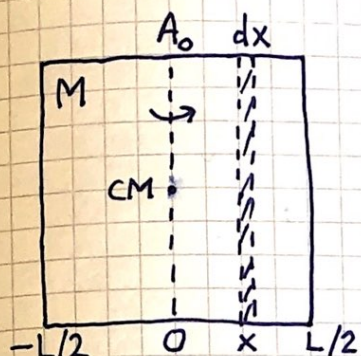
Tynt kuleskall: $I_o = \frac{2}{3} MR^2$ Kompakt kule: $I_o = \frac{2}{5} MR^2$

$\Rightarrow I_o = c \cdot MR^2$ med $c = 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}$ for hhv ring, kuleskall, skive, kule

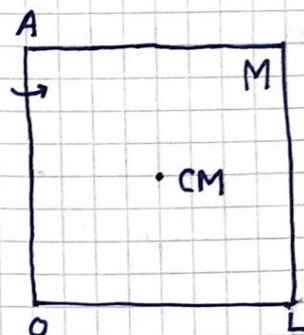
Steiners sats [os1 10.5]

(23)

Illustreres med svingdør vs sidehengslet dør:



Parallellforskyver
aksen med
 $d = L/2$



$$g^2 = x^2; dm = M dx/L$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 M dx/L = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$

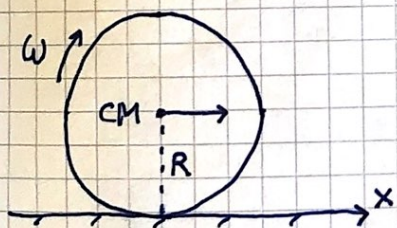
$$I = \int_0^L x^2 M dx/L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

som med $d = L/2$ er

$$I = I_0 + M d^2$$

Gjelder generelt: $I = I_0 + M d^2$ [Se notat for bevis]

Ren rulling [os1 11.1]



For en hel omdreining: $\Delta x = 2\pi R$, $\Delta t = T$

$$\Rightarrow \underline{v} = \Delta x / \Delta t = 2\pi R / T = \underline{\omega R}$$

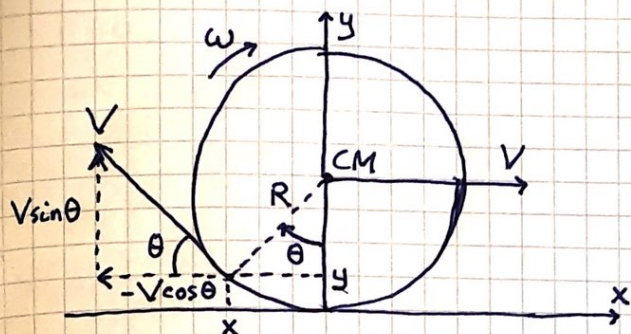
(Rullebetingelsen)

$$K = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \cdot c M R^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} (1+c) M v^2}}$$

Kompakt kule (lab): $c = 2/5 \Rightarrow K = \underline{\underline{\frac{7}{10} M v^2}}$

Periferiens hastighet og baneform:

(24)



Fra fig: $v_x = V - V \cos \theta$
 $v_y = V \sin \theta$

$$\omega = \dot{\theta} = V/R$$

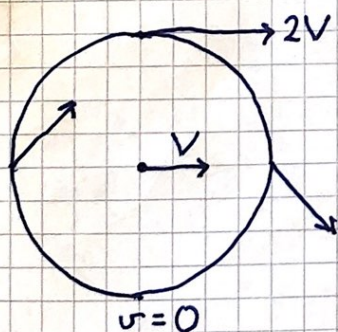
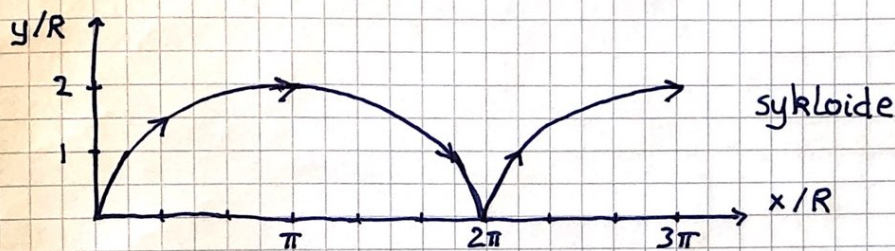
$$V = R \dot{\theta}$$

Anta $x=y=0$ for $\theta=0$:

$$x(\theta) = R\theta - R \sin \theta$$

$$y(\theta) = R - R \cos \theta$$

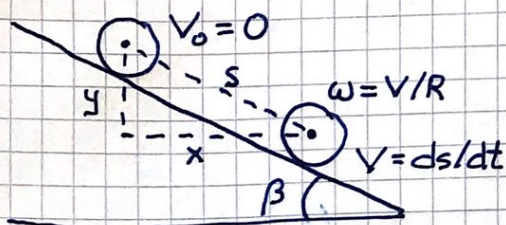
$$\left. \begin{array}{l} x(\theta) = R\theta - R \sin \theta \\ y(\theta) = R - R \cos \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_x = R\dot{\theta} - R\dot{\theta} \cos \theta = V - V \cos \theta \\ v_y = R\dot{\theta} \sin \theta = V \sin \theta \end{array} \right\} \text{OK}$$



Kontaktpunktet: $v=0$
 (Hjulet glir ikke)

Ren rulling på skråplan:

$$I_0 = c \cdot MR^2$$



$$v_y = dy/dt = V \sin \beta$$

$$(v_x = dx/dt = V \cos \beta)$$

Bestem V , A , f og $\beta_{\max}$ for ren rulling

(25)

Statisk friksjon $f \Rightarrow$ Mek. energi er bevart

$$\Rightarrow Mgy = \frac{1+c}{2} MV^2 \Rightarrow V(y) = \sqrt{\frac{2gy}{1+c}}$$

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot V \sin \beta = \frac{g \sin \beta}{1+c}$$

$$N2: Mg \sin \beta - f = MA \Rightarrow f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta$$

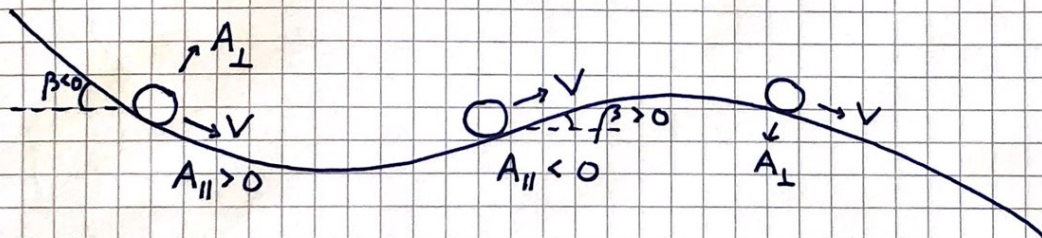
$$f \leq \mu_s N ; N = Mg \cos \beta$$

$$\Rightarrow \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta \leq \mu_s Mg \cos \beta \Rightarrow \tan \beta \leq \mu_s \cdot \frac{1+c}{c}$$

Eks: Anta $\mu_s = 0.2 = 1/5$ og kompakt kule, dvs $c = 2/5$

$$\text{Da er } \beta_{\max} = \arctan \left\{ \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{2} \right\} = \underline{35^\circ}$$

Rulling på krum bane:



N2 $\perp$ banen:

$$N - Mg \cos \beta = MA_{\perp}$$

$$Mg \cos \beta - N = MA_{\perp}$$

$$A_{\perp} = V^2/g ; g = \text{krumningsradien}$$

N2 $\parallel$ banen:

$$Mg \sin \beta - f = MA_{\parallel}$$



$\Rightarrow \omega$ øker



$\Rightarrow \omega$ avtar

Impuls. Kollisjoner. Rakettprinsipp

[0519]

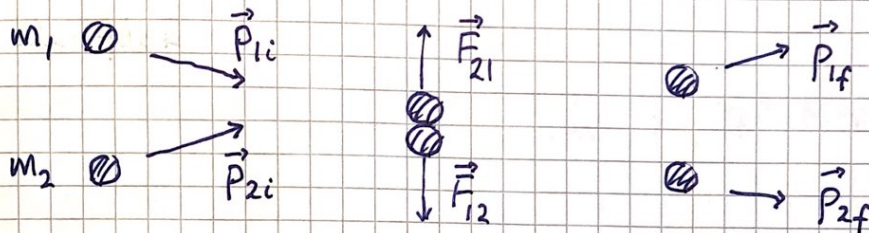
(26)

Fra før: $\vec{p} = m\vec{v}$ = massens impuls ; $[p] = \text{kg m/s}$

$$N2: \vec{F} = d\vec{p}/dt$$

Impulsbevarelse: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p}$ er bevart

Må gjelde i kollisjoner (støt) dersom ytre krefter kan neglisjeres i kollisjonen:



$$N3 \Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0 \xRightarrow{N2} d\vec{p}_1/dt + d\vec{p}_2/dt = 0$$

$\Rightarrow$ Systemets totale impuls $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ endres ikke i støtet

Men: Kinetisk energi kan gå tapt pga friksjon, deformasjon..

Elastisk støt: $\Delta K = 0$ Uelastisk støt: $\Delta K < 0$

Fullstendig uelastisk støt: Legemene henger sammen med felles slutfart etter kollisjonen. Gir maksimal $|\Delta K|$.

Vi ser kun på kollisjon i 1D: Sentralt støt

$$\begin{array}{l} \text{Før:} \quad m \otimes \rightarrow v_i \quad V_i \leftarrow \otimes M \\ \text{Etter:} \quad v_f \leftarrow \otimes m \quad M \otimes \rightarrow V_f \end{array} \quad \longrightarrow +$$

$$\text{Uansett er } \Delta p = 0 : m v_i + M V_i = m v_f + M V_f \quad (1)$$

$$\text{Hvis fullstendig uelastisk: } v_f = V_f = (m v_i + M V_i) / (m + M)$$

$$\text{Elastisk : } \frac{1}{2} m u_i^2 + \frac{1}{2} M V_i^2 = \frac{1}{2} m u_f^2 + \frac{1}{2} M V_f^2 \quad (2) \quad (27)$$

Løser (1) og (2) og får:

$$u_f = \frac{M}{m+M} \left(2V_i + u_i \cdot \frac{m-M}{M} \right) ; \quad V_f = \frac{m}{M+m} \left(2u_i + V_i \cdot \frac{M-m}{m} \right)$$

Eks: Ball mot vegg

$$m \otimes \rightarrow u_i \quad \left\{ \begin{array}{l} M \rightarrow \infty \\ V_i = 0 \end{array} \right.$$

$$u_f = ? \quad \otimes m \quad \left\{ \begin{array}{l} M \\ V_f = ? \end{array} \right.$$

$$\text{Løsn: } u_f = \frac{M}{m+M} \cdot u_i \cdot \frac{m-M}{M} = \underline{\underline{-u_i}} ; \quad V_f = \frac{m}{M+m} \cdot 2u_i = \underline{\underline{0}}$$

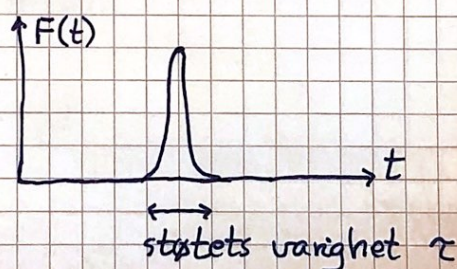
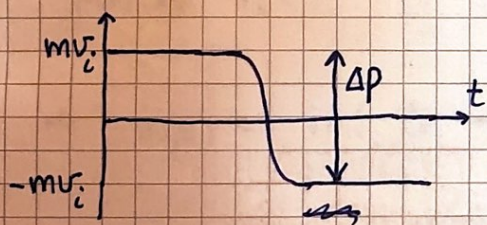
Impulsbevarelse?

$$m u_i = m u_f + M V_f = -m u_i + M \cdot \frac{m}{M+m} \cdot 2u_i = -m u_i + 2m u_i = \underline{\underline{m u_i}} \quad (\text{OK})$$

Kraftstøt:

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt \Rightarrow \Delta\vec{p} = \int d\vec{p} = \int \vec{F}(t) dt$$

Eks: Ball mot vegg



Midlere akselerasjon i støtet:

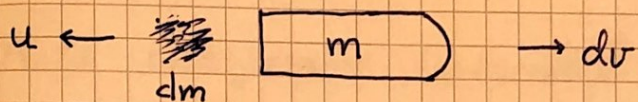
$$\text{Anta } u_i = 10 \text{ m/s} \quad \text{og} \quad \tau = 2 \text{ ms}$$

$$\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t = 20 \text{ m/s} / 2 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 10^4 \text{ m/s}^2 \gg g \approx 10 \text{ m/s}^2$$

Dvs OK å neglisjere ytre kraft mg i "kollisjonsøyeblikket"

Rakettprinsipp

(28)

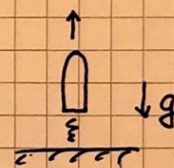


Eksos, masse dm pr tidsenhet, sendes ut av raketten med fart u .
Impulsbevarelse gir raketten akselerasjon:

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} = F_{\text{skyt}}$$

I tyngdefeltet kommer tyngdekraften i tillegg.

Oppskyting: $m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} - mg$



Anta $v(0) = 0$ og konstante u og g .

Mult. lign. med dt/m og integrer fra $t=0$:

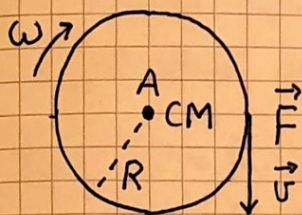
$$\int_0^{v(t)} dv = u \int_{m(0)}^{m(t)} \frac{dm}{m} - g \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow v(t) = u \ln \frac{m(t)}{m(0)} - gt$$

Her er $u < 0$ og $m(t) < m(0)$

$$\Rightarrow v(t) = |u| \ln \frac{m(0)}{m(t)} - gt$$

Anta rotasjonsakse (og dermed $\vec{\omega}$) med fast orientering



Tilført effekt:

$$1) P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = F \cdot R \cdot \omega$$

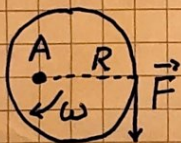
$$2) P = dK/dt = \frac{1}{2} I_0 d\omega^2/dt = I_0 \omega d\omega/dt$$

$$\Rightarrow \tau = I_0 \frac{d\omega}{dt}$$

N2 for rotasjon om akse med fast orientering

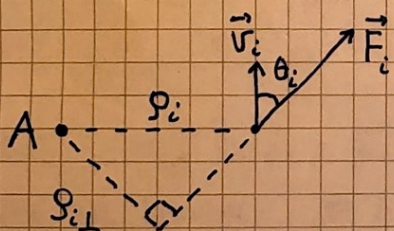
Kraftens dreiemoment: $\tau = F \cdot R$

Kan ha rotasjon om akse som ikke går gjennom CM:



$$\tau = I \dot{\omega} ; \tau = F \cdot R$$

Og mer generelt kan vi ha flere krefter som bidrar til totalt dreiemoment:



$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_i v_i \cos \theta_i$$

$$= \sum_i F_i r_i \omega \cos \theta_i = \tau \cdot \omega$$

med

$$\tau = \sum_i F_i r_i \cos \theta_i = \sum_i F_i r_{i\perp}$$

Kraftens arm:

$r_{i\perp}$ = avstand fra rot.aksen (A) til forlengelseslinjen til $\vec{F}_i$

$$P = dW/dt \quad \text{og} \quad P = \tau \omega = \tau d\phi/dt$$

(30)

slik at

$$dW = \tau d\phi$$

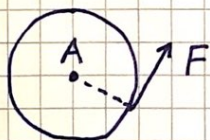
er arbeid utført av dreiemoment τ når omløpt vinkel er $d\phi$.

Er på samme form som $dW = F \cdot dx$.

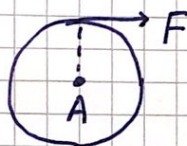
Hvis $P = \vec{F} \cdot \vec{v} > 0 : \dot{\omega} > 0$ (vinkelfarten øker)

$P = \vec{F} \cdot \vec{v} < 0 : \dot{\omega} < 0$ (—"— avtar)

"Fortegn" på τ :

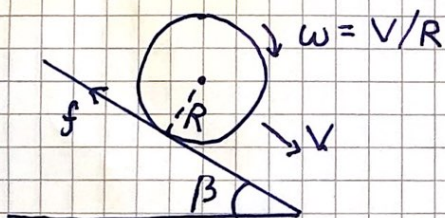


ω øker mot klokka



ω øker med klokka

Eks 1: Ren rulling på stråplan (se s. 24-25)



$$N2 : Mg \sin \beta - f = M \dot{v}$$

$$N2, \text{ rot. om CM: } \tau = I_o \dot{\omega} = c MR^2 \cdot \dot{v}/R$$

Ytre dreiemoment: $\tau = f \cdot R$ ($\vec{N}$ og $M\vec{g}$ har null arm!)

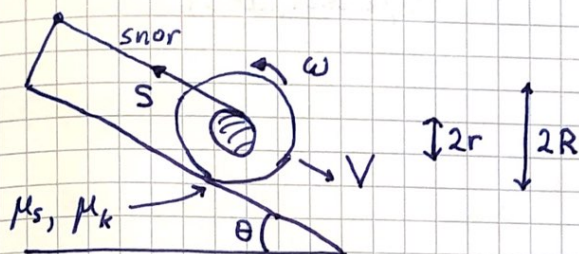
$$\Rightarrow f = c M \dot{v} \quad \Rightarrow \dot{v} = \frac{g \sin \beta}{1+c}$$

$$\text{og} \quad f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta$$

} som før

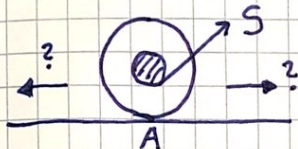
Eks 2: Snelle baklengs på skråplan (øving 6)

(31)



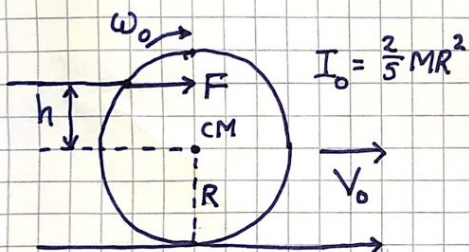
- Ved hvilken vinkel θ_0 begynner snella å gli og rotere baklengs?
- Hva er S og $\dot{V}$ når $\theta > \theta_0$?

Eks 3: Hvilken vei ruller snella?



Tips: Vurder "fortegnet" på snordragets dreiemoment relativt kontaktlinjen A!

Eks 4: Snooker [OS1 11.1]



Antar kort horisontalt støt over ($h > 0$) eller under ($h < 0$) senterlinjen gjennom CM, med kraft F .

Neglisjerer friksjon f i selve støtet.

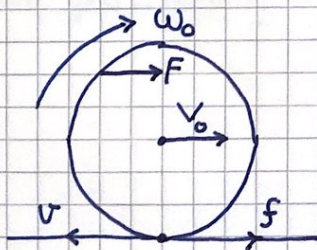
Retten etter støtet (med varighet Δt): Fart V_0 og vinkelfart ω_0

$$N2: F = \Delta p / \Delta t = M V_0 / \Delta t$$

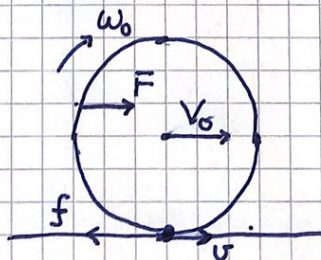
$$N2 \text{ rot. om CM: } \tau = I_0 \Delta \omega / \Delta t \Rightarrow F \cdot h = \frac{2}{5} M R^2 \cdot \omega_0 / \Delta t$$

Ren rulling hvis $\omega_0 = V_0 / R$; da må vi ha $h = \frac{2}{5} R$.

"Sluning":



$h > 2R/5 \Rightarrow \omega_0 > V_0/R$
 V øker, ω avtar



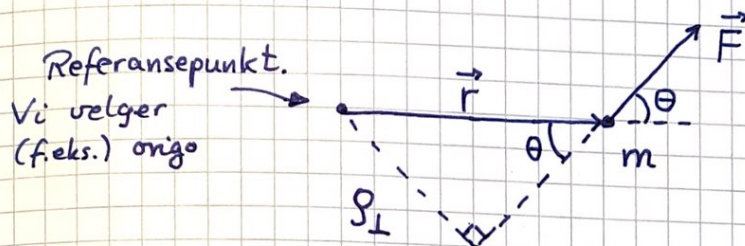
$h < 2R/5 \Rightarrow \omega_0 < V_0/R$
 V avtar, ω øker

Rotasjonsdynamikk med vektorer

(32)

Nødvendig når rot.aksen (og $\vec{\omega}$) endrer retning.

Dreiemoment [OS1 10.6]



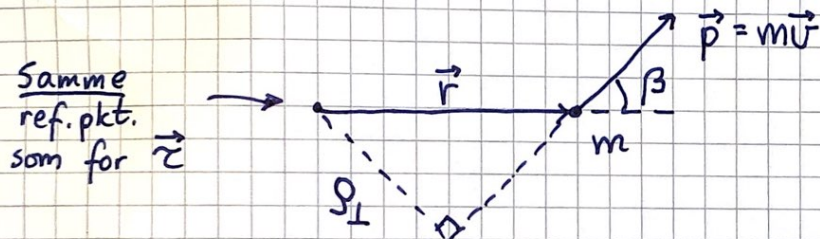
$\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \text{kraftens dreiemoment (relativt origo)}$

$\vec{\tau} \perp \vec{r} \text{ og } \vec{F}$ (Her: ut av planet, med HHR)

$\tau = |\vec{\tau}| = r F \sin \theta = s_{\perp} F$; $s_{\perp} = \text{kraftens arm (som før)}$

Med flere ytre krefter: $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Dreieimpuls [OS1 11.2]



$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \text{massens dreieimpuls (relativt origo)}$

$\vec{L} \perp \vec{r} \text{ og } \vec{p}$

$L = |\vec{L}| = r p \sin \beta = s_{\perp} p$

Med partikkelsystem: $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

evt. $\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm$

N2 for rotasjon

[OS1 11.2]

(33)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \quad (\text{sidan } \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0)$$

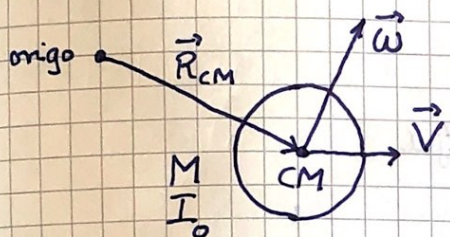
ders $\boxed{\vec{\tau} = d\vec{L}/dt}$

- På samme form som $\vec{F} = d\vec{p}/dt$
- Statisk likevekt, $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$, hvis $\vec{F} = 0$ og $\vec{\tau} = 0$

$\vec{L}$ for stivt legeme

[OS1 11.2]

Antar at legemet er uendret ved rotasjon 180° om rot.aksen



Eks: Jorda, med sola i origo

$$R_{CM} \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km}, \quad V \approx 30 \text{ km/s}$$

$$\frac{2\pi}{\omega} \approx 24 \text{ h}, \quad \frac{2\pi R_{CM}}{V} \approx 365 \text{ d}$$

Fra def. ($\vec{L} = \int \vec{r} \times d\vec{p}$; se notat for utledning) får vi:

$$\vec{L}_s = I_O \vec{\omega} = \text{indre dreieimpuls (spinn)}$$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = \text{banedreieimpuls}$$

$$\text{Total dreieimpuls: } \vec{L} = \vec{L}_s + \vec{L}_b$$

- $\vec{L}_b$ avhenger av ref.pkt., $\vec{L}_s$ er uavh. av ref.pkt.
- Hvis CM i ref.pkt.:

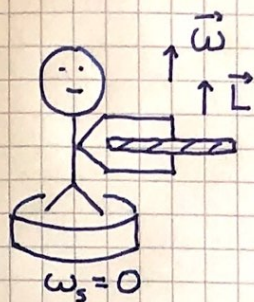
$$R_{CM} = 0, \quad L_b = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_s = I_O \vec{\omega}$$

Hvis akse med fast orientering:

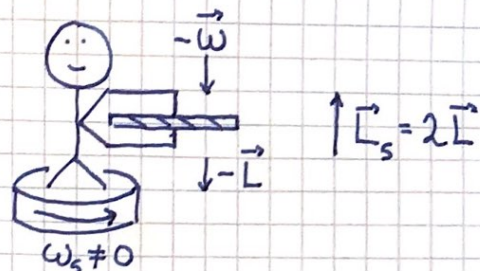
$$\tau = dL/dt = I_O \dot{\omega} \quad \text{som før}$$

Eks 1: Konstant $\vec{L}$ på kontorstol

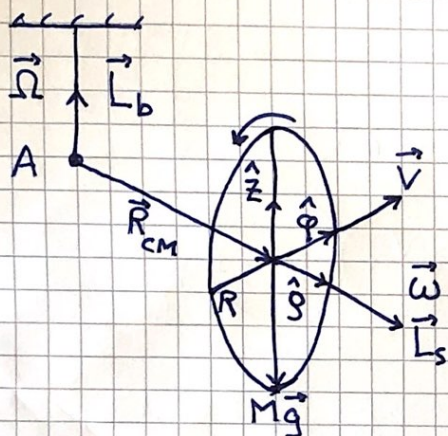
(34)



Hjulet snus
 $\vec{r} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{L} = 0$



Eks 2: Presesjon [OS1 11.4]



$$I_o \approx MR^2$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}, R_{cm} \approx 0.2 \text{ m}$$

$$T_\Omega = 2\pi/\Omega \approx 5 \text{ s}$$

$$\omega \gg \Omega$$

Bestem T_ω

Løsning:

- Velg A som ref.pkt. og bruk $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$
- $\vec{\tau} = \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} = R_{cm} Mg \hat{\phi}$
- $\omega \gg \Omega \Rightarrow L_s \gg L_b \Rightarrow \vec{L} \approx \vec{L}_s = I_o \vec{\omega} = MR^2 \omega \hat{\phi}$
- $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} \Rightarrow R_{cm} Mg \hat{\phi} = MR^2 \omega d\hat{\phi}/dt$
- $\hat{\phi}$ roterer om z-aksen med vinkelhastighet $\Omega \Rightarrow d\hat{\phi}/dt = \Omega \hat{\phi}$
- Dermed: $R_{cm} Mg = MR^2 \omega \Omega \Rightarrow \omega = R_{cm} g / R^2 \Omega$
- Med $\omega = 2\pi/T_\omega$ og $\Omega = 2\pi/T_\Omega$:

$$T_\omega = (2\pi R)^2 / (R_{cm} g T_\Omega)$$

Her: $\pi R \approx 1 \text{ m}$, $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ og $R_{cm} T_\Omega \approx 1 \text{ m} \cdot \text{s}$

$\Rightarrow T_\omega \approx 0.4 \text{ s}$ dvs ca 2.5 omløp pr sekund
 (150 rpm)

Swingninger

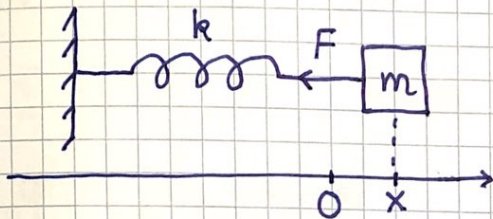
[OS1 15]

(35)

er gjentakende (periodisk) oppførsel omkring en likevekt.
Eks: Masse/fjær. Pendler. Atomers vibrasjoner i molekyler og krystaller. Ladning og strøm i elektriske kretser.

Harmonisk oscillator

[OS1 15.1]



$x(t)$ = posisjonen til m

$x = 0$: likevekt ($F = 0$)

$x > 0$: strukket fjær ($F < 0$)

$x < 0$: komprimert fjær ($F > 0$)

Hookes lov for ideell fjær:

$F(x) = -kx$ = kraft fra fjæra på m ;

k = fjærkonstanten, $[k] = \text{N/m}$

N2 for massen m :

$$-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Generell Løsning:

$$x(t) = B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t \quad (\text{vises ved innsetting})$$

Systemets egenfrekvens (evt. naturlige frekvens):

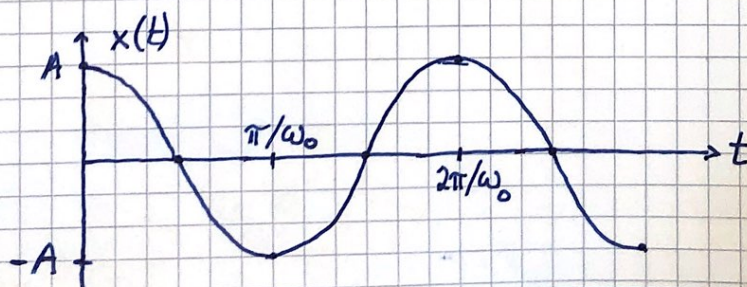
$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (\text{strengt tatt en vinkel frekvens})$$

Alternativ form på løsningen:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

[Siden $\cos(\omega_0 t + \varphi) = \cos \omega_0 t \cos \varphi - \sin \omega_0 t \sin \varphi$ er løsningene likeverdige når $B = -A \sin \varphi$ og $C = A \cos \varphi$]

Med f.eks. $\varphi = 0$:



Størrelser som inngår er i stor grad de samme som vi bruker for å beskrive sirkelbevegelse:

(36)

A = amplitude = max utsving fra likevekt

ω_0 = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet (s^{-1})

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hel svingning (s)

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet (Hz)

φ = fasekonstant

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

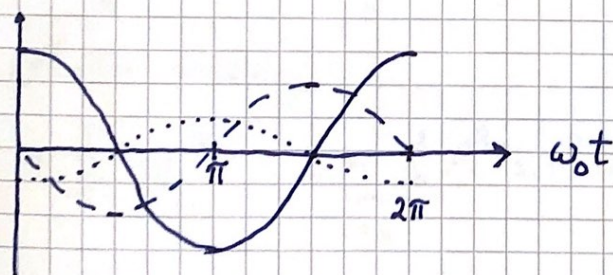
A og φ , eventuelt B og C , fastlegges med to startbetingelser, f.eks $x(0)$ og $\dot{x}(0)$.

Med (f.eks.) $\varphi = 0$:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t$$

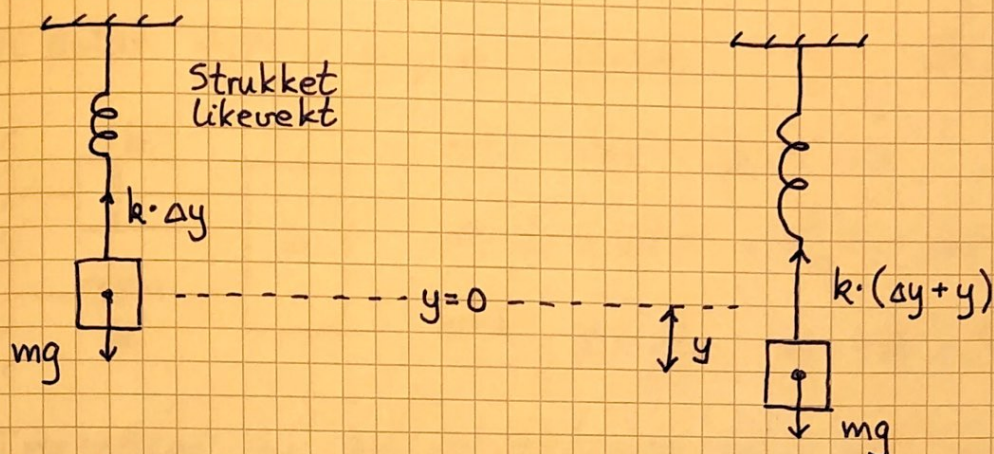
$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t \quad [= -\omega_0^2 x(t) \text{ slik at } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0; \text{ osv}]$$



— $x(t)$
- - $\dot{x}(t)$
... $\ddot{x}(t)$

Masse og fjær i tyngdefeltet:

(37)



$$N1: k \Delta y = mg$$

$$\Rightarrow \Delta y = mg/k$$

$$N2: mg - k \cdot (\Delta y + y) = m \ddot{y}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

$\Rightarrow$ Harmonisk svingning om strukket likevekt, med uendret frekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Energi i harmonisk oscillator [OS1 15.2]

$$x(t) = A \cos \omega_0 t, \quad \dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t$$

Potensiell energi:

$$U = -\int_0^x F(x) dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Kinetisk energi:

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \underbrace{\omega_0^2}_{=k} A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

Total mekanisk energi:

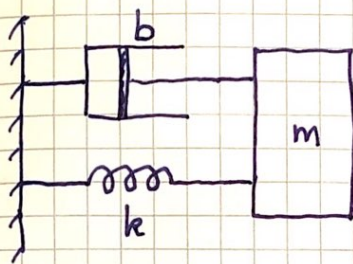
$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{1}{2} k A^2$$

uavhengig av t , så fjærkraften er konservativ.

Dempet fri svingning [OS1 15.5]

(38)

Vi antar friksjon prop. med farten : $f = -b\dot{x}$



$$N2: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{med } \gamma = \frac{b}{2m} \quad \text{og} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Innsetting av løsning på formen $\exp(-\alpha t)$ gir

$$(\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2) \exp(-\alpha t) \Rightarrow \alpha = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk damping:

$$\gamma = \omega_0 \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow x(t) = (A + Bt) \exp(-\gamma t)$$

Svakeste damping som ikke gir svingninger. (Bra i støtdempere)

Overkritisk damping:

$$\gamma > \omega_0 \Rightarrow \alpha_{\pm} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \Rightarrow x(t) = A e^{-\alpha_+ t} + B e^{-\alpha_- t}$$

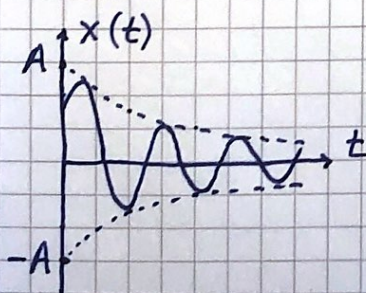
Underkritisk damping:

$$\gamma < \omega_0 \Rightarrow \alpha = \gamma \pm i\omega; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}; \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\exp(-\alpha t) = \exp(-\gamma t) \cdot (\cos \omega t \pm i \sin \omega t)$$

$$\text{Reell løsning: } x(t) = A \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \varphi)$$

Harmonisk svingning med avtagende amplitude $A \exp(-\gamma t)$



Omhylningskurver: $\dots \pm A e^{-\gamma t}$

γ^{-1} er en "karakteristisk tid"

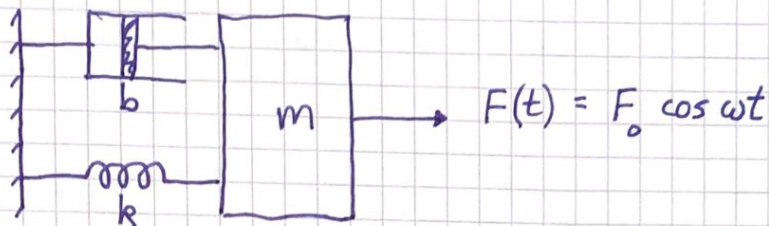
for hvor lenge svingebewegelsen varer

Har ofte svak damping, $\gamma \ll \omega_0$.

$$\text{Da er } \omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Tvingen svingning og resonans [OSI 15.6]

(39)



$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad ; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Generell løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen del x_h oppfyller $\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$ slik at $x_h(t) \sim \exp(-\gamma t)$ som dempes ut etter et innsvingningsforløp med varighet ca $5/\gamma$ ($\exp(-5) < 1\%$). Deretter er $x(t) \approx x_p(t)$, partikulærløsningen, som må være på formen

$$x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] \\ = A(\omega) \{ \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi \}$$

Innsetting av x_p , $\dot{x}_p$ og $\ddot{x}_p$ gir nå 2 ligninger, på formen

$$\sin \omega t \cdot f_1(A, \varphi) = 0 \quad ; \quad \cos \omega t \cdot f_2(A, \varphi) = 0$$

hvoretter $f_1(A, \varphi) = 0$ og $f_2(A, \varphi) = 0$ fastlegger A og φ :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{\omega_0^2}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{1/2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right]$$

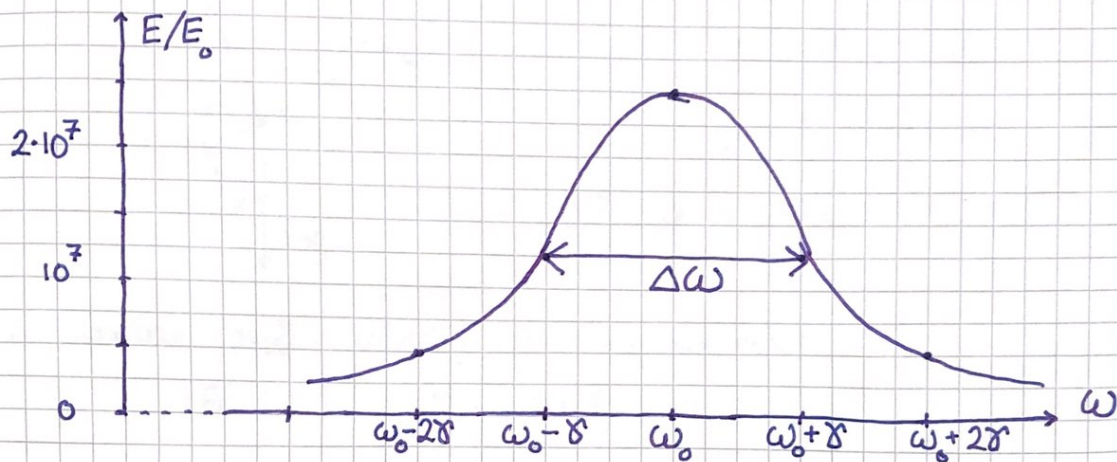
Resonans:

Svak damping, $\gamma \ll \omega_0$, og ytre kraft med frekvens $\omega \approx \omega_0$ gir stor amplitude A og dermed høy energi $E = \frac{1}{2} k A^2$ i oscillatoren.

Eks: Anta $\gamma = 10^{-4} \omega_0$. Plott $E(\omega)$. Bestem resonanskurvens halvverdibredde og oscillatorens Q -faktor (40)

Løsn:

$$E(\omega) = \frac{1}{2} k A^2(\omega) = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad ; \quad E_0 = \frac{F_0^2}{2k}$$



Halvverdibredde (FWHM, Full Width at Half Maximum):

$$\Delta\omega = 2\gamma = b/m$$

Q -faktor ("quality"):

$$Q = \omega_0 / \Delta\omega$$

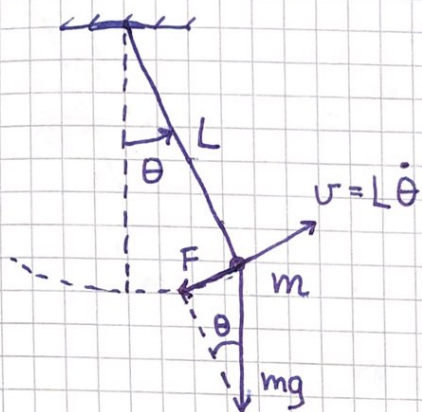
Svak damping gir $Q \gg 1$ og smal resonanskurve.

Her: $Q = 5000$

Pendler [osi 15.4]

(41)

Matematisk pendel: Punktmasse i masseløs snor/stang



N2 || sirkelbanen: $F = ma$

med $F = -mg \sin \theta$

$$a = \dot{v} = L\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -mg \sin \theta = mL\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + (g/L) \sin \theta = 0$$

Vi antar små utsving omkring likevekt:

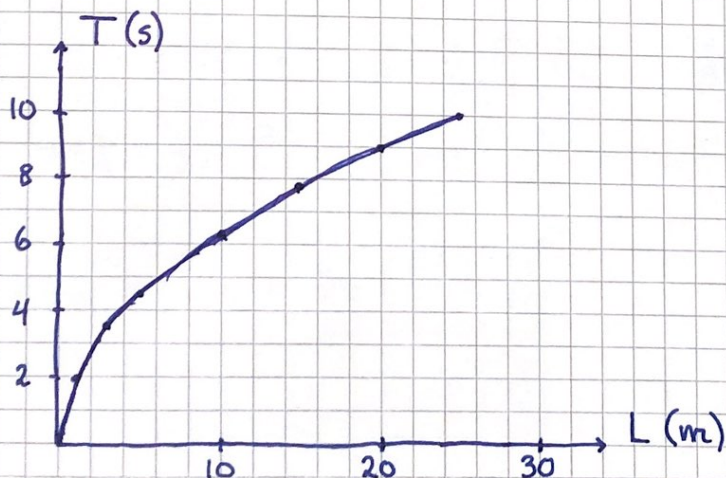
$$|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{g/L}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Eks: Foucaultpendelen i Realfagbygget

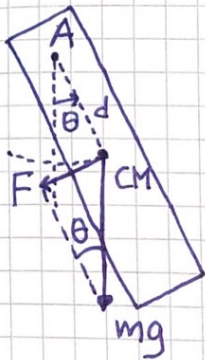
$$L = 25 \text{ m} \Rightarrow \text{Periode } T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{L/g} \approx 10 \text{ s}$$



Fysisk pendel:

(42)

Stivt legeme som svinger om akse A i avstand d fra CM.



N2, rotasjon om A: $\tau = I \ddot{\theta}$

med $\tau = -F \cdot d = -mgd \sin \theta$

I = treghetsmoment mhp akse gjennom A

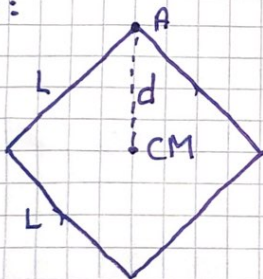
$$\Rightarrow -mgd \sin \theta = I \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + (mgd/I) \sin \theta = 0$$

Anta små utsving: $\sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \quad \omega_0 = \sqrt{mgd/I}$$

Eks:



$$I_0 = \frac{1}{6} ML^2 \quad (\text{jf Test 6, oppg 4})$$

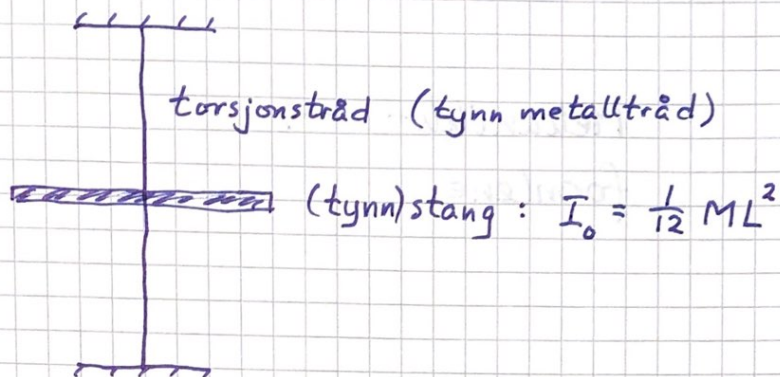
Bestem svingetiden.

$$\begin{aligned} \text{Løsn: } I &= I_0 + Md^2 ; \quad d = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 + L^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} L \\ &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) ML^2 = \frac{2}{3} ML^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{I/Mgd} = \underline{\underline{2\pi \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \sqrt{\frac{L}{g}}}}$$

Torsjonsspendel:

(43)



Sett langs torsjonstråden:



Vridt torsjonstråd virker på stanga med dreiemoment

$$\tau = -\mathcal{H}\theta$$

der $\mathcal{H}$ = trådens torsjonsstivhet ; $[\mathcal{H}] = \text{N}\cdot\text{m}$
($\mathcal{H}$ avhenger av trådens diameter, lengde og type materiale)

N2 for rotasjon om tråden: $\tau = I_0 \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow -\mathcal{H}\theta = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\mathcal{H}/I_0}$$

Med $M = 50\text{g}$, $L = 11\text{cm}$ og $T = 0.8\text{s}$
finner vi

$$\mathcal{H}_{\text{exp}} = I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \approx \underline{\underline{0.003 \text{ Nm}}}$$

MEKANIKK. ET LITE SAMMENDRAG I FORM AV FORMLER.

- Newtons andre lov: $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$
 - Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$
 - Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
 - Arbeid: $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$ Effekt: $P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$
 - Konservativ kraft og potensiell energi: $U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$
 - Friksjon, statisk: $f \leq \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$
 - Luftmotstand (liten v): $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$ Luftmotstand (stor v): $\mathbf{f} = -Dv^2\hat{v}$
 - Tyngdepunkt: $\mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{r}_i m_i \rightarrow \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \cdot dm$
 - Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r d\omega/dt$
 - Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ Statisk likevekt: $\sum \mathbf{F}_i = 0$ $\sum \boldsymbol{\tau}_i = 0$
 - Dreieimpuls: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ N2 rotasjon: $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$
 - Stivt legeme, refleksjonssymmetri mhp rotasjonsaksen: $\mathbf{L} = \mathbf{L}_b + \mathbf{L}_s = \mathbf{R}_{CM} \times M\mathbf{V} + I_0\boldsymbol{\omega}$
 - Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$
 - Tregghetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm$
- Kompakt sylinder (skive): $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$ Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$ Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3}MR^2$
- Tynn stang: $I_0 = \frac{1}{12}ML^2$
- Stivt legeme, rotasjon om fast akse: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
 - N2 rotasjon, akse med fast orientering: $\tau = I \frac{d\omega}{dt}$
 - Steiners sats (parallellakse-teoremet): $I = I_0 + Md^2$
 - Gravitasjon: $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$ $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ $\mathbf{g} = \mathbf{F}/m$
 - Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $T = 2\pi/\omega_0$ $f = 1/T = \omega_0/2\pi$
- Masse i fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ Matematisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{g/L}$
- Fysisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{mgd/I}$ Torsjonspendel: $\omega_0 = \sqrt{\kappa/I_0}$
- Fri, dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$
- $\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\omega_0^2 = k/m$ $\gamma = b/2m$
- Underkritisk damping ($\gamma < \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
- Overkritisk damping ($\gamma > \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$ $\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$
- Kritisk damping ($\gamma = \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$
- Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$
- (partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$
- amplitude: $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$
- halvverdibredde: $\Delta\omega \simeq 2\gamma$ Q-faktor: $Q = \omega_0/\Delta\omega$

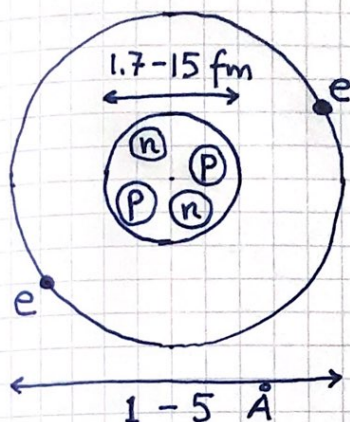
ELEKTROMAGNETISME

(45)

Elektrostatikk [OS2 5-8]

Ladning [OS2 5.1]

Bohrs atommodell (1913 ; nobelpriis 1922) :



	Symbol	Masse (kg)	Ladning
elektron	e	$9.11 \cdot 10^{-31}$	-e
proton	p	$1.67 \cdot 10^{-27}$	+e
nøytron	n	$1.67 \cdot 10^{-27}$	0

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$$

$$1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m} \text{ (ångström)}$$

Ladning er kvantisert i enheter av elementærladningen :

$$e = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C} \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Symbol: q, Q Enhet: $[q] = \text{C}$ (coulomb)

Nøytralt atom med atomnummer Z :

$$Z \text{ protoner og } Z \text{ elektroner} \Rightarrow Q = Z \cdot e + Z \cdot (-e) = 0$$

Ioner er atomer og molekyler med $Q \neq 0$:

Eks: Na^+ , F^- , Ca^{2+} , CO_3^{2-}

Isotoper av samme grunnstoff har ulikt antall nøytroner

Eks: ^4He (fig. ovenfor), ^3He

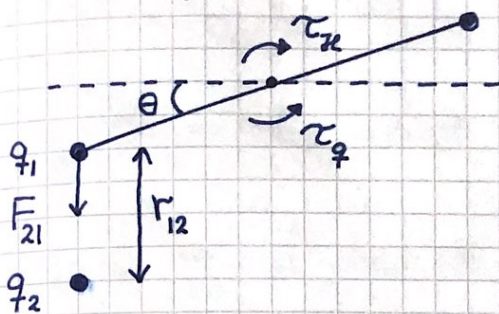
$$Z=2 \Rightarrow \text{hvor } 2 \text{ og } 1 \text{ nøytron}$$

Coulombs lov [OS2 5.3]

(1785)

(46)

Torsjionspendel:



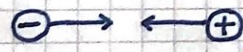
Likerekt: $\tau_q = \tau_k$

$$\tau_k = \kappa \theta$$

$$\tau_q = F_{21} \cdot \frac{1}{2} L \cdot \cos \theta$$

$$\text{Exp: } F_{21} \sim q_1 q_2 / r_{12}^2$$

Tiltrekning mellom ulike typer ladning:



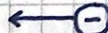
Frastøtning

— " —

samme

— " —

:



Coulombs lov:

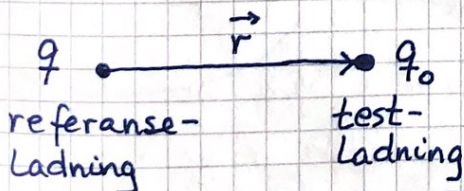
$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{21}$$

Vakuumperrmittiviteten: $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

Elektrisk felt

[OS2 5.4-5.5]



Kraft fra q på q0:

$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

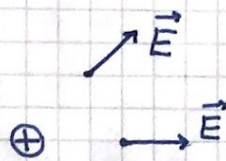
elektrisk felt $\stackrel{\text{def}}{=}$ el. kraft pr ladningsenhet

$$\vec{E} = \vec{F} / q_0 \quad ; \quad [E] = \text{N/C}$$

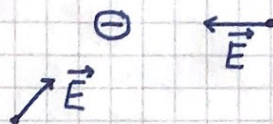
En punktladning q omgir seg med et elektrisk felt: (47)

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

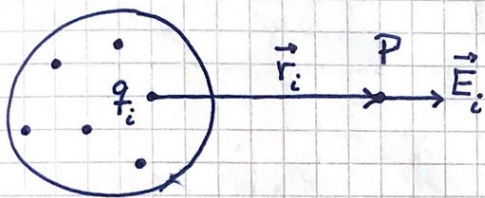
$q > 0 \Rightarrow \vec{E}$ radielt utover:



$q < 0 \Rightarrow \vec{E}$ radielt innover:



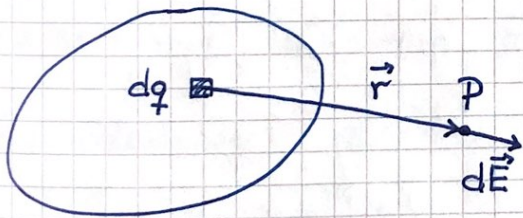
Totalt felt fra flere punktladninger:



$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$$

= totalt felt i posisjon P

$\vec{E}$ fra kontinuert ladningsfordeling:



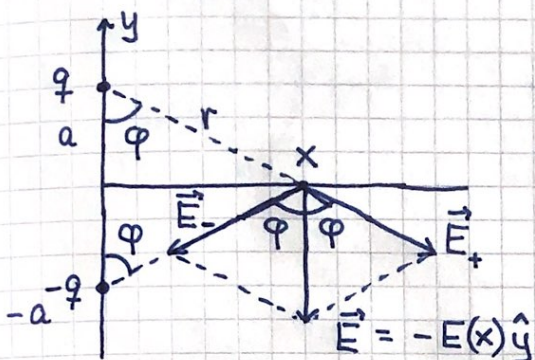
$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dq \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

= totalt felt i pos. P

Eks 1: Elektrisk dipol

48

$\pm q$ i $y = \pm a$; bestem $\vec{E}$ på x-aksen



$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_+ + \vec{E}_- \\ E &= 2E_+ \cos\varphi \quad (E_- = E_+) \\ \cos\varphi &= a/r \\ E_+ &= q/4\pi\epsilon_0 r^2 \\ r &= \sqrt{x^2 + a^2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{y} \cdot \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Langt unna dipolen, dvs $x \gg a$:

Da er $x \approx r$ og $x^2 + a^2 \approx r^2$ slik at

$$\vec{E} \approx -\hat{y} \cdot 2qa/4\pi\epsilon_0 r^3$$

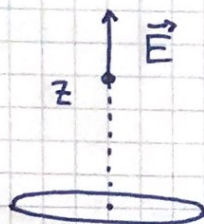
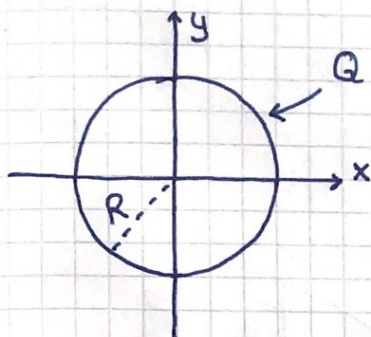
$\vec{E}_+$ og $\vec{E}_-$ kansellerer delvis slik at $E(r)$ går raskere mot null enn fra en enkelt punktladning.

Punktladning: $E(r) \sim 1/r^2$

Dipol: $E(r) \sim 1/r^3$

Eks 2: Jeunt ladet ring. $\vec{E}$ på symmetriaksen.

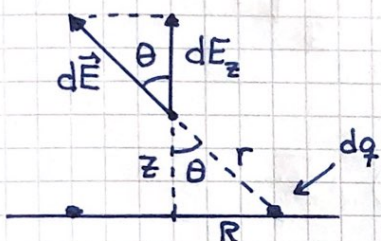
(49)



Symmetri



$$\vec{E} = E(z) \hat{z}$$



Felt fra dq : $dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

med z -komponent

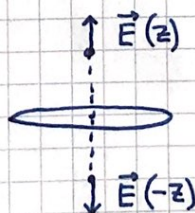
$$dE_z = dE \cdot \cos \theta = dE \cdot \frac{z}{r}$$

$$r = \sqrt{z^2 + R^2}$$

$$\Rightarrow \underline{E(z)} = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int dq = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

- Langt unna ringen, $z \gg R$: $E(z) \approx Q/4\pi\epsilon_0 z^2$
Rimelig! Da ser ringen ut som en punktladning Q i origo.

- $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$; rimelig:

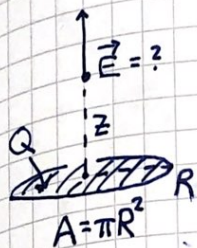


- $\vec{E}(0) = 0$; rimelig: Pga symmetri kansellerer bidragene fra ladning på diametralt motsatte steder



Eks 3: Jeunt ladet skive. $\vec{E}$ på symmetriaksen.

(50)



Skiva tilsvarer mange tynne ringer med radius $0 \leq r \leq R$, bredde dr , areal $dA = 2\pi r \cdot dr$ og ladning $dq = Q \cdot dA/A$.

Hver ring bidrar med $dE_z = dq \cdot z / 4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}$ til feltet $\vec{E} = E(z) \hat{z}$ på z-aksen (jf. Eks 2).

Integrasjon fra $r=0$ til $r=R$ gir

$$E(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ 1 - \left(1 + R^2/z^2\right)^{-1/2} \right\}$$

som langt unna skiva blir ($z \gg R \Rightarrow (1 + R^2/z^2)^{-1/2} \approx 1 - R^2/2z^2$)

$$E(z) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \quad \text{som ventet,}$$

men viktigere for oss er feltet nær skiva, dvs for $z \ll R$:

$$E \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{uavhengig av } z!$$

Skivas ladning pr flateenhet: $\sigma = Q/A = Q/\pi R^2$

Feltlinjer for $\vec{E}$ [OS2 5.6]

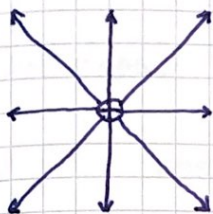
Gir et bilde av $\vec{E}$ omkring ladningene.

Retning: $\vec{E} \parallel$ feltlinjene

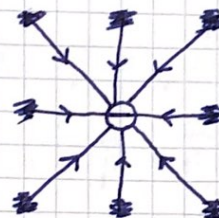
Feltstyrke: $E = |\vec{E}|$ proporsjonal med feltlinjetettheten
(dvs antall feltlinjer pr flateenhet)

Eks 1: Punktladning

(51)

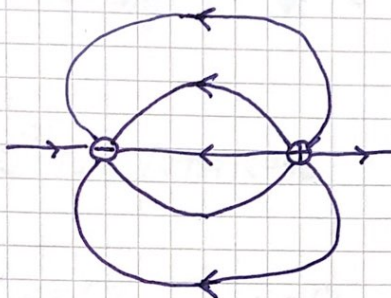


$$E(r) = q / 4\pi\epsilon_0 r^2$$

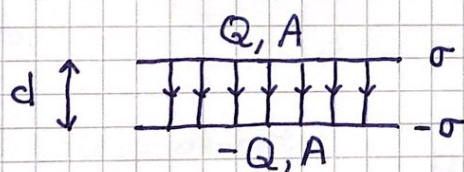
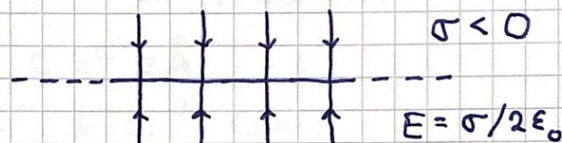


Feltlinjene starter på positive og ender på negative ladninger

Eks 2: Dipol



Eks 3: Jeunt ladet plate og parallelplatekondensator



Når $d \ll \sqrt{A}$ er $\vec{E}$ tilnærmet konstant mellom platene

Feltstyrke: $E = 2 \cdot \sigma / 2\epsilon_0 = \sigma / \epsilon_0$

Utenfor volumet mellom platene er $E \approx 0$

Elektrisk dipolmoment

[OS2 5.7]

(52)

Enkel dipol: $-q \xrightarrow{d} q$

Dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$

Med flere punktladninger q_i i posisjoner $\vec{r}_i$: $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$

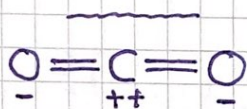
Med kontinuerlig ladningsfordeling: $\vec{p} = \int \vec{r} dq$

En dipol har null nettoladning: $\sum_i q_i = 0$ evt $\int dq = 0$

Enhet: $[p] = C \cdot m$

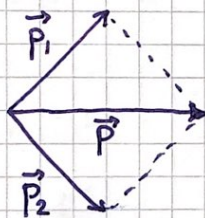
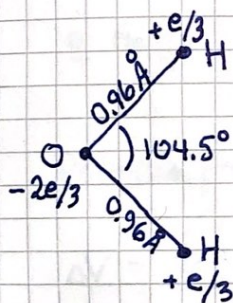
Enheten debye: $1D = 10^{-21} C \cdot m / 299792458 = 3.336 \cdot 10^{-30} C \cdot m$

Eks 1: CO_2



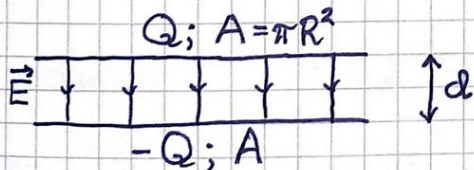
$p = 0$

Eks 2: H_2O



$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot \frac{e}{3} \cdot 0.96 \text{ Å} \cdot \cos 52.25^\circ \\ &= 0.39 e \text{ Å} \\ &= 6.3 \cdot 10^{-30} C \cdot m \\ &= 1.89 D \end{aligned}$$

Eks 3: Platekondensator



$R = 10 \text{ cm}$, $d = 1.0 \text{ mm}$, $Q = 25 \text{ nC}$

Finn E og p .

$$\sigma = Q/A = 25 \cdot 10^{-9} C / \pi \cdot (0.10 \text{ m})^2 = 8.0 \cdot 10^{-7} C/m^2$$

$$E = \sigma / \epsilon_0 = \underline{\underline{9.0 \cdot 10^4 \text{ N/C}}}$$

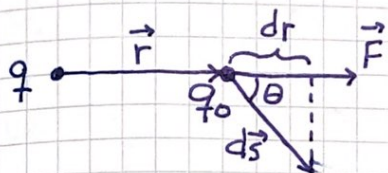
$$p = Q \cdot d = \underline{\underline{2.5 \cdot 10^{-11} C \cdot m}}$$

Potensiell energi og elektrisk potensial

[OS2 7.1-7.2]

(53)

Endring dU i pot.energi for ladningspar når $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{s}$:



$$\begin{aligned} dU &= -\vec{F} \cdot d\vec{s} = -F \cdot ds \cdot \cos\theta \\ &= -F \cdot dr = -qq_0 dr / 4\pi\epsilon_0 r^2 \end{aligned}$$

Velger $U = 0$ når $r \rightarrow \infty$.

$$\Rightarrow U(r) = - \int_{\infty}^r \frac{qq_0 dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{pot. energi for}$$

ladningspar q og q_0 i innbyrdes avstand r

Elektrisk potensial $\stackrel{\text{def}}{=}$ Pot. energi pr ladningsenhet

$$V(r) = U(r)/q_0 = q/4\pi\epsilon_0 r = \text{potensialet som ladingen } q \text{ omgir seg med} = \text{Coulombpotensialet}$$

Potensialforskjell mellom to posisjoner f og i :

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_i^f \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{q_0} = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Enhet: $[V] = V$ (volt)

Dermed: $[E] = V/m$ (mer brukt enn N/C)

En nyttig energienhet på atomært nivå er

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV (elektronvolt)} &= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ J/C} \\ &= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

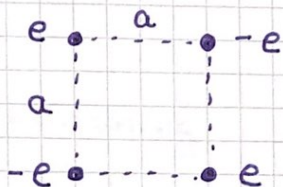
(54)

Pot. energi for flere punktladninger:

$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \text{bidraget fra ladningsparet } q_i \text{ og } q_j$$

$$U = \sum_{\text{alle par}} U_{ij} = \text{systemets totale pot. energi}$$

Eks:



$$a = 1.0 \text{ nm}$$

$$U = -4 \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} + 2 \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2} a} = -5.96 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \underline{\underline{-3.7 \text{ eV}}}$$

Beregning av $\vec{E}$ fra V [OS2 7.4]

Fra før: $\vec{F} = -\nabla U$

Med $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ og $U = q_0 V$ følger da:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

Eks: Punktladning

$$V(r) = q/4\pi\epsilon_0 r$$

Kulesymmetri: $\nabla = \hat{r} \frac{d}{dr}$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{r} \frac{dV}{dr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} ; \quad \text{OK}$$

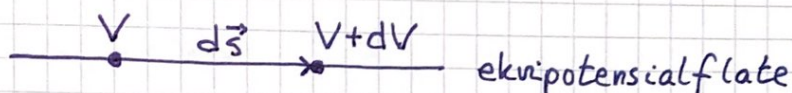
Equipotensial

[052 7.5]

(55)

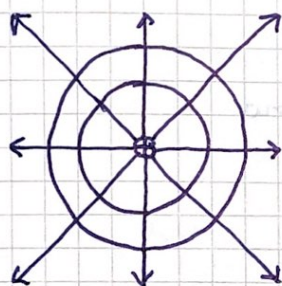
Et område der potensialet V er konstant.

$\vec{E}$ står normalt på equipotensialflatene:



$$dV = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{s}$$

Eks: Punktladning



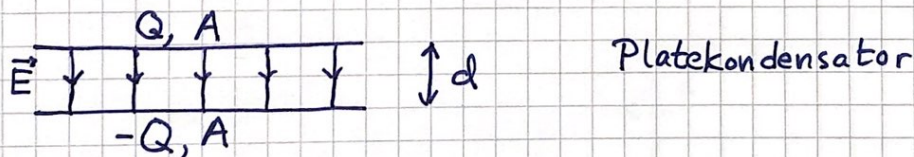
Radielle feltlinjer for $\vec{E}$

$\Rightarrow$ Equipotensialflatene
er kuleskall (med punktladningen
i sentrum)

Kapasitans

[052 8]

En kondensator består av to adskilte ledere, f.eks.
to parallelle metallplater:



Med ladning $\pm Q$ på de to lederne er feltet
mellom dem $\vec{E}$ med feltstyrke $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/A\epsilon_0$.

Da er pot.forskjellen (spenningen) mellom lederne

$$\Delta V = - \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot d = Qd/A\epsilon_0$$

Kondensatorens kapasitans: $C \stackrel{\text{def}}{=} Q/\Delta V$

For platekondensator:

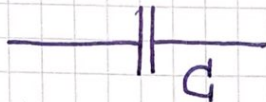
$$C = \epsilon_0 A/d$$

(56)

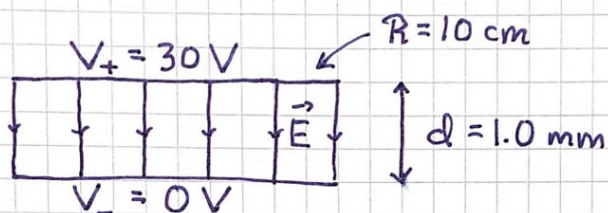
Enhet: $[C] = C/V = F$ (farad)

Enhet for permittivitet: $[\epsilon_0] = F/m$

Symbol for kondensator i elektriske kretser:



Eks:



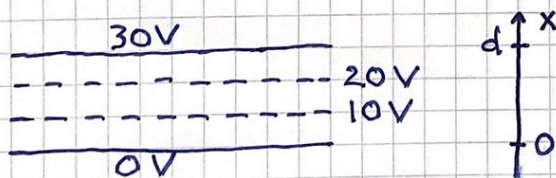
Beregn E , $\pm Q$ og C . Tegn ekuipotensialflater ved 10V og 20V.

Løsn:

$$\Delta V = E \cdot d \Rightarrow E = \Delta V/d = 30V/mm = \underline{\underline{30 \text{ kV/m}}}$$

$$Q = \sigma A = \epsilon_0 E \pi R^2 = \underline{\underline{8.3 \text{ nC}}}$$

$$C = Q/\Delta V = \epsilon_0 A/d = \underline{\underline{0.28 \text{ nF}}}$$



$$V(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \sigma x / \epsilon_0 & ; 0 < x < d \\ \sigma d / \epsilon_0 & ; x \geq d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla V = -\hat{x} \frac{dV}{dx} = -\hat{x} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ mellom platene (E=0 utenfor)}$$

Materialers elektriske egenskaper

(57)

Ledere/Metaller [OS2 7.5, 6.4]

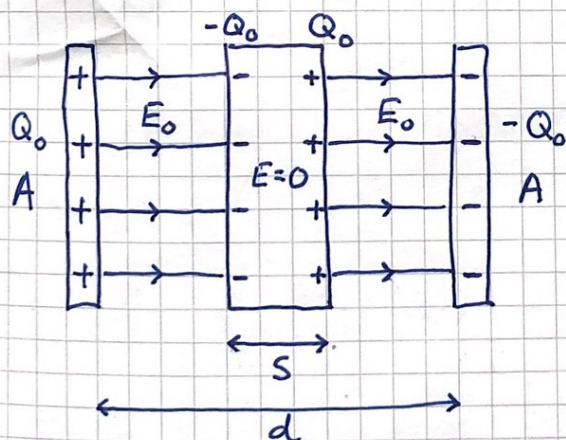
Har frie elektroner ; 1-3 pr atom.

Settes i bevegelse hvis $\vec{E} \neq 0$: $\vec{a} = \vec{F}/m_e = -e\vec{E}/m_e$ (N2)

Dermed, i elektrostatisk likevekt:

- $E=0$ inni et metall
- All nettoladning på overflaten [Gauss' lov ; ikke pensum]
- På overflaten er $E_{||}=0$ og $E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$ ($\sigma = Q/A$)
- Lederbiten er et ekvipotensial : $\Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{s}$ for enhver forflytning på lederbiten
- Leder med hulrom : $E=0$ inni hulrommet og all nettoladning på ytre overflate

Eks1: Ideell platekondensator delvis fylt med metallskive



$E=0$ inni metallskiva.

$E_0 = \sigma_0/\epsilon_0 = Q_0/A\epsilon_0$ = felt skapt av kondensatorplatene, induserer like mye ladning $\pm Q_0$ på metallskivas overflater, slik at totalt felt blir $E=0$ inni metallskiva.

[Vi har 4 plan med ladning ; alle ~~mulle~~ bidrar med feltstyrke $\sigma_0/2\epsilon_0$ hver bort fra og inn mot positivt og negativt plan.]

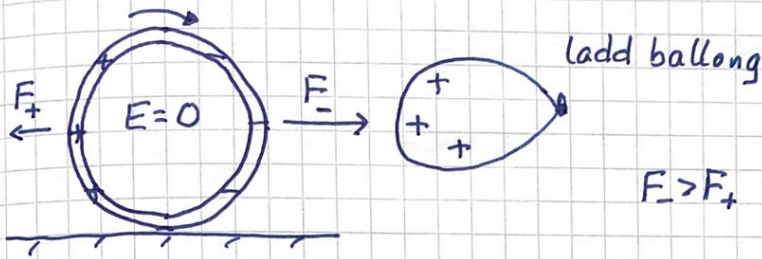
Systemets kapasitans:

$$\Delta V = E_0 \cdot (d-s) = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A} (d-s) \Rightarrow C = \frac{Q_0}{\Delta V} = \epsilon_0 \frac{A}{d-s}$$

Eks 2: Faradaybur

58

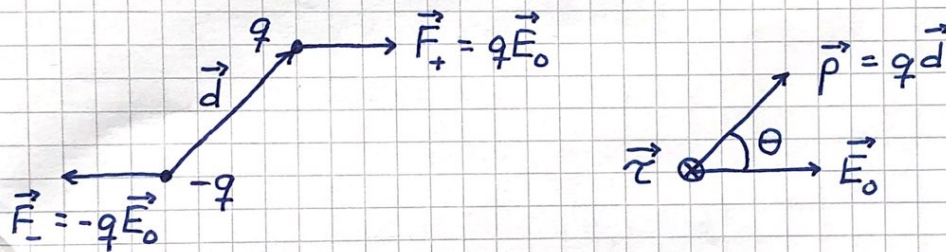
metallboks med hulrom



$E_- > E_+ \Rightarrow$ Netto tiltrekning

Isolator / Dielektrikum [os2 8.5]

Har ikke frie elektroner, men har bundet ladning som gir polarisering i ytre felt $\vec{E}_0$. Molekylær dipol:



Dreiemoment på dipolen: $\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

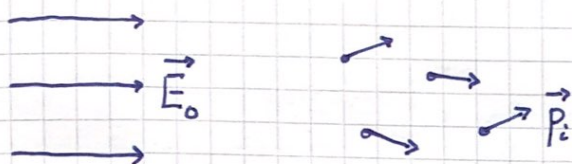
$$\Rightarrow \tau = 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot qE_0 \cdot \sin\theta = pE_0 \sin\theta = |\vec{p} \times \vec{E}_0|$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0}$$

Potensiell energi: $U = -\int \tau d\theta = -pE_0 \cos\theta$

$$\Rightarrow \boxed{U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0} \quad (\text{med valget } U=0 \text{ for } \theta=\pi/2)$$

Dipolene får en tendens til å orientere seg med $\vec{p}$ i samme retning som det ytre feltet $\vec{E}_0$:



Elektrisk polarisering $\stackrel{\text{def}}{=}$ dipolmoment pr volumenhet

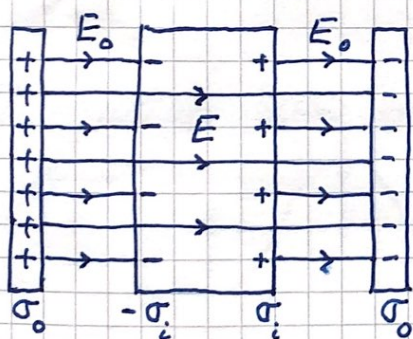
$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i / V \quad ; \quad [P] = \text{C/m}^2$$

Eks: Maksimal polarisering i vann

Løsn: 18 g/mol, 10^6 g/m^3 , $6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ og
 $p \approx 3 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$ (s. 52)

$$\Rightarrow P_{\text{max}} \approx 0.1 \text{ C/m}^2$$

Permittivitet og relativ permittivitet:



Nettoeffekten av det ytre feltet $\vec{E}_0$ (med $E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$) er en induert ladningstetthet $\pm \sigma_i$ på overflaten av isolatoren, og et svekket felt inni isolatoren.

[Også her: 4 plan med ladning, $\pm \sigma_0$ og $\mp \sigma_i$, som bidrar til totalt felt med hhv $\sigma_0 / 2\epsilon_0$ og $\sigma_i / 2\epsilon_0$]

Inni isolatoren:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i \quad ; \quad E = E_0 - E_i < E_0 \quad ; \quad E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0, \quad E_i = \sigma_i / \epsilon_0$$

Antar lineær respons: E_i prop. med E_0 ; dermed E prop med E_0

Isolatorens relative permittivitet: $\epsilon_r = E_0 / E$

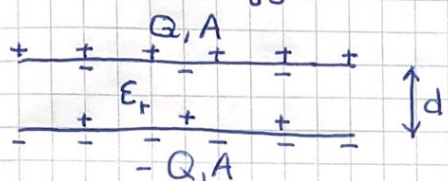
Isolatorens permittivitet: $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

Et par tallverdier:

(60)

ϵ_r	vakuum	tørr luft	plast	rent vann	metall
	1	1.00054	2-6	80	∞

- Kondensator fylt med dielektrikum:

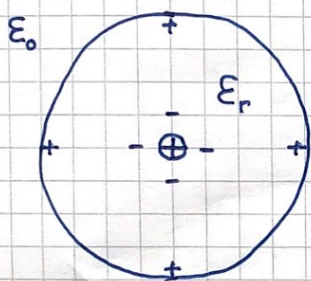


$$\Delta V = E \cdot d = \frac{E_0}{\epsilon_r} d ; E_0 = \frac{Q/A}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow C = \epsilon_r \epsilon_0 A/d$$

der C øker med faktor ϵ_r (i forhold til luftfylt kondensator)

- Felt omkring ion inni isolator:

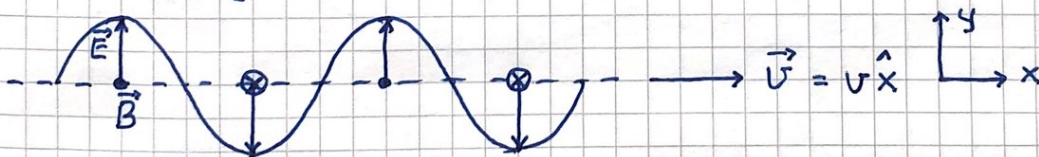


Isolatoren polariseres i feltet fra ladningen Q slik at feltet svekkes inni isolatoren:

$$E = E_0 - E_i = E_0/\epsilon_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r r^2}$$

Utenfor isolatoren: $E = E_0 = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$

- Elektromagnetiske bølger og brytningsindeks for isolator:



$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t) ; \vec{E}_0 = E_0 \hat{y}$$

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(kx - \omega t) ; \vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$$

$$\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{v}$$

$$k = 2\pi/\lambda, \quad \omega = 2\pi f, \quad v = \lambda f = \omega/k$$

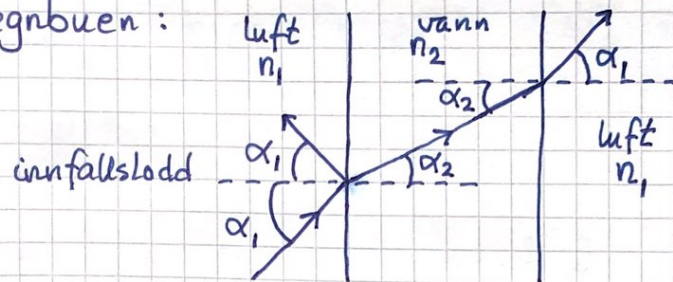
$$n(\lambda) = \sqrt{\epsilon_r(\lambda)} = \text{isolatorens brytningsindeks}$$

$$v = c/n = \text{lysfarten i isolatoren}$$

$$\text{Synlig lys: } \lambda = 400 - 700 \text{ nm} ; n(\lambda) \approx 1.3 \text{ for vann}$$

$$\Rightarrow v \approx 2.3 \cdot 10^8 \text{ m/s i vann}$$

• Regnbuen:



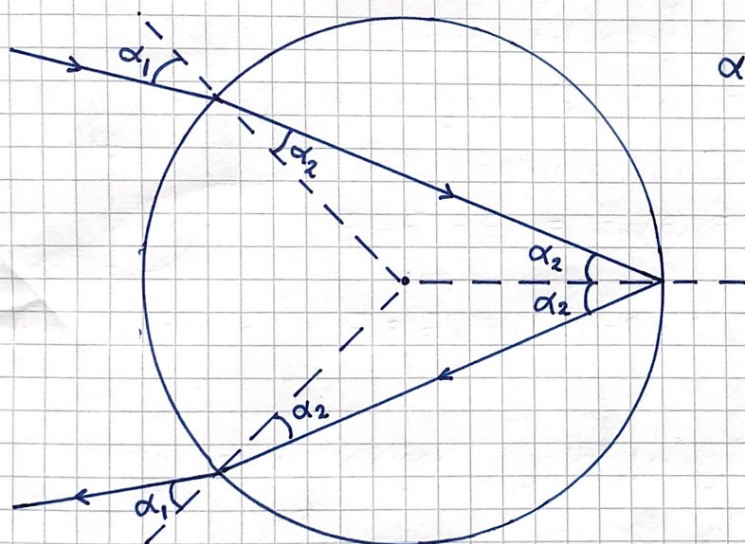
Snells lov for brutt (transmittert) stråle:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

Luft: $n_1 = 1$

Vann: $n_2(400 \text{ nm}) = 1.345, \dots, n_2(700 \text{ nm}) = 1.331$

Lysets gang gjennom regndråpene:



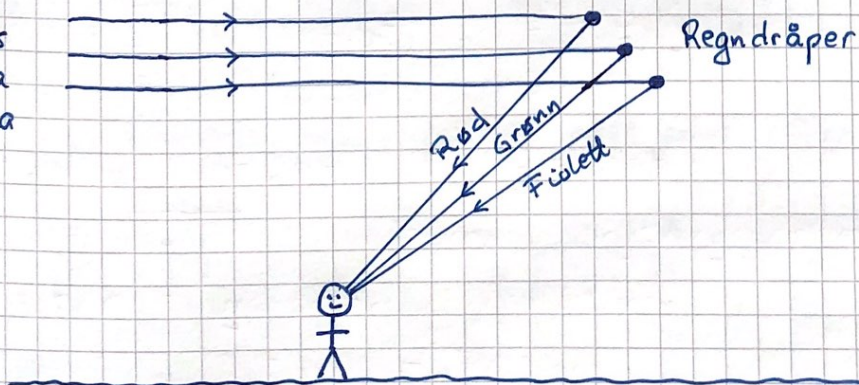
$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{1}{n_2} \sin \alpha_1\right)$$

$\Rightarrow$ Størst n_2 gir
minst vinkel α_2



Fiolett brytes
mest; rødt minst

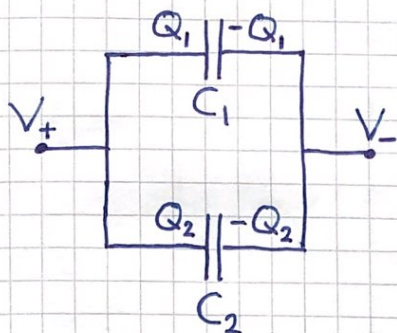
Lys
fra
sola



Kobling av kapasitanser [os2 8.2]

(62)

Parallellkobling:



Lik spenning over C_1 og C_2 :

$$V = V_+ - V_- = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

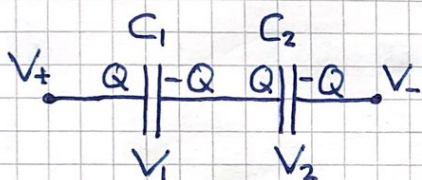
Total ladning:

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V$$

$\Rightarrow$ Total kapasitans:

$$C = Q/V = C_1 + C_2$$

Seriekobling:



Lik ladning på C_1 og C_2 :

$$Q = C_1 V_1 = C_2 V_2$$

Total spenning:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$\Rightarrow$ Total kapasitans:

$$\frac{1}{C} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

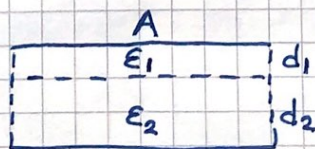
Med N stk i parallell: $C = \sum_{j=1}^N C_j$

Med N stk i serie: $C = \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{1}{C_j} \right\}^{-1}$

Kan brukes på kondensator fylt med ulike isolatorer:



$$C = \frac{\epsilon_1 A_1}{d} + \frac{\epsilon_2 A_2}{d}$$

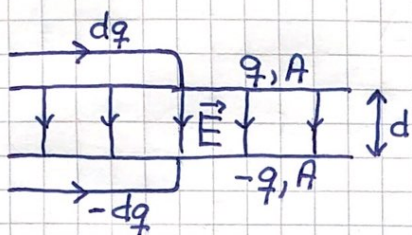


$$C^{-1} = \left(\frac{\epsilon_1 A}{d_1} \right)^{-1} + \left(\frac{\epsilon_2 A}{d_2} \right)^{-1}$$

Energi i et $\vec{E}$ -felt [OS2 8.3]

(63)

Vi beregner arbeidet W som kreves for å lade opp en ideell kondensator og finner dermed energien $U=W$ som er lagret i $\vec{E}$ -feltet mellom kondensatorplatene.



Spennning med ladning $\pm q$: $v(q) = \frac{q}{C}$

Økning med $\pm dq$ øker energien med

$$dU = v(q) dq = \frac{q}{C} dq$$

$\Rightarrow$ Total energi tilført ved opplading fra $q=0$ til $q=Q$:

$$U = \int dU = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2$$

Med $C = \epsilon_0 A/d$ og $V = Ed$:

$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (Ad)$$

$A \cdot d$ = volumet mellom platene, dvs der $\vec{E} \neq 0$. Dermed:

$$\underline{u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2} = \text{energien pr volumenhet i et } \vec{E}\text{-felt} \\ (\text{gjelder generelt})$$

Eks: Med $V = 400 \text{ V}$, $d = 1.0 \text{ mm}$, $\epsilon_r = 5.0$,
hva må platearealet være for å lagre energimengden 1.0 kWh ?

$$\text{Løsn: } 1.0 \text{ kWh} = 10^3 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J} = U = \frac{1}{2} CV^2$$

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 A/d$$

$$\Rightarrow A = \frac{2Ud}{\epsilon_r \epsilon_0 V^2} = \frac{2 \cdot 3.6 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 400^2} \text{ m}^2 = \underline{\underline{1017 \text{ m}^2}} \quad (\approx 1 \text{ mål})$$

Elektrisk strøm

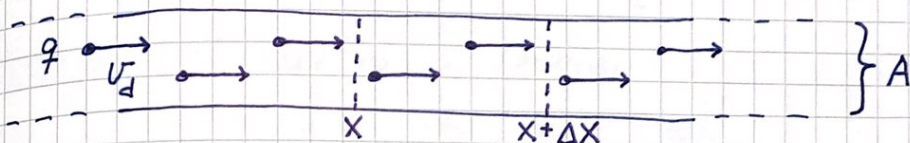
[OS2 9, 10]

64

Strøm og strømtetthet

[OS2 9.1, 9.2]

strøm $\stackrel{\text{def}}{=}$ mengden ladning som passerer et tverrsnitt av en leder pr tidsenhet



A = lederens tverrsnitt

q = ladningen til en fri ladningsbærer; $q = -e$ i metall

v_d = midlere driftshastighet langs lederen

n = antall ladningsbærere pr volumenhet

I løpet av tiden $\Delta t = \Delta x / v_d$ passerer all fri ladning

$\Delta Q = q \cdot N = q \cdot n \cdot A \Delta x$ i volumet $A \Delta x$ ved $x + \Delta x$

$$\Rightarrow I = \Delta Q / \Delta t = q n A \Delta x / (\Delta x / v_d) = n q v_d A$$

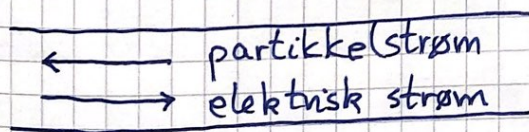
$$[I] = C/s = A \text{ (ampere)}$$

Når $\Delta t \rightarrow 0$: $I = dQ/dt$

strømtetthet $\stackrel{\text{def}}{=}$ strøm pr flateenhet

$$j = I/A = n q v_d \Rightarrow \vec{j} = n q \vec{v}_d ; [j] = A/m^2$$

Metall: $q = -e$; $\vec{j} = -n e \vec{v}_d$

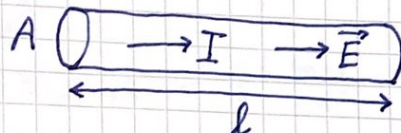


Ohms lov [os2 9.2-9.4]

(65)

Anta leder med lengde l og tverrsnitt A .

En spenning $V = E \cdot l$ over lederen driver en strøm $I = j \cdot A$:



N2 for fritt elektron i lederen:

$$\vec{F} = m_e \vec{a} \quad \text{med} \quad \vec{F} = -e \vec{E}$$

Pga kollisjoner får elektronene en midlere driftsfart

$$\vec{v}_d = \vec{a} \cdot \tau$$

der τ = midlere tid mellom kollisjoner

Dermed:

$$\vec{j} = -ne \vec{v}_d = -ne \left(\frac{-e \vec{E}}{m_e} \right) \tau = \sigma \vec{E}$$

med $\sigma = ne^2 \tau / m_e$ = materialets elektriske ledningsevne (evt: konduktivitet).

Dette er Drude-modellen (Paul Drude, 1900)

og Ohms lov på mikroskopisk form.

Med $j = I/A$ og $E = V/l$ får vi:

$$I = G \cdot V \quad \text{med} \quad G = \sigma A / l$$

evt

$$V = R \cdot I \quad \text{med} \quad R = G^{-1} = l / \sigma A$$

som er Ohms lov på makroskopisk form, dvs for en gitt leder med lengde l og tverrsnitt A .

Lederens resistans (motstand): $R = l / \sigma A$; $[R] = \Omega$ (ohm)

— " — konduktans: $G = \sigma A / l$; $[G] = S$ (siemens)

Materialets resistivitet: $\rho = \sigma^{-1}$; $[\rho] = \Omega m$

— " — konduktivitet: σ ; $[\sigma] = S/m$

Kretssymbol:



eller



66

Eks 1: Anslå antall frie elektroner pr volumenhett i kobber.

Anta 1 fritt elektron pr Cu-atom. Molar masse: 63 g/mol.

Massetetthet: ca 9 g/cm³.

Løsn 1: $n = (9 \text{ g/cm}^3) / (63 \text{ g/mol}) = \frac{1}{7} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^3} \approx 10^{29} \text{ pr m}^3$

Eks 2: Hva er v_d i en Cu-ledning med $A = 2.5 \text{ mm}^2$ og $I = 1.0 \text{ A}$?

Løsn 2:

$$v_d = \frac{I}{neA} = 1.0 / (10^{29} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 2.5 \cdot 10^{-6}) \frac{\text{m}}{\text{s}} = 25 \mu\text{m/s}$$

Eks 3: Anslå σ for Cu ved romtemperatur. Anta en midlere fri veilengde 2 nm mellom påfølgende kollisjoner, samt at elektronenes midlere kinetiske energi er $\frac{3}{2} k_B T$ (der $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ er Boltzmanns konstant).

Løsn 3:

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m_e}} \approx 10^5 \text{ m/s ved } T \approx 300 \text{ K}$$

$$\Rightarrow \tau \approx 2 \cdot 10^{-9} \text{ m} / 10^5 \text{ m/s} = 2 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

$$\Rightarrow \sigma = n e^2 \tau / m_e \approx 5.6 \cdot 10^7 \text{ S/m}$$

(som er omtrent eksperimentell verdi ved 300 K)

Motstand og temperatur [OS2 9.3]

I en leder (metall): Økt $T \Rightarrow$ økt $v \Rightarrow$ redusert τ mens n er omtrent uendret. Dermed: σ avtar; ρ øker.

Empirisk: $g(T) = g_0 [1 + \alpha \cdot (T - T_0)]$

med $\alpha \approx 0.004 \text{ K}^{-1}$ for diverse metaller

og $g_0 = g(T_0)$ = referanseverdi ved f.eks. 293 K

Halvledere: Si, Ge, GaAs, GaN,

Er isolator med $n \approx 0$ ved $T \approx 0 \text{ K}$.

Økt $T \Rightarrow$ flere elektroner frigjøres $\Rightarrow \sigma$ øker

Anvendelser: dioder ($\Rightarrow$ solceller), transistorer, lasere, LED-pærer osv

Superledere:

$\rho = 0$ for $T < T_c =$ materialets kritiske temperatur

To og to elektroner danner "Cooper-par" som kan bevege seg gjennom materialet uten å kollidere med noe som helst.

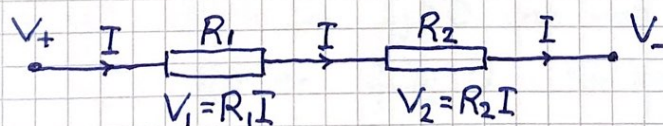
Strøm I kan gå i superlederen "uendelig" lang tid, uten en påtrykt spenning.

Anvendelser: MRI/NMR, massespektrometer, partikkelakselerator osv

[John Bardeen, 1908-1991: Nobelpriis i fysikk 1956 for oppdagelse av transistor-effekten, og Nobelpriis i fysikk 1972 for utvikling av en teori for superledning (BCS-teorien)]

Kobling av motstander [OS2 10.2]

Seriekobling:



Lik strøm I gjennom R_1 og R_2

Total spenning: $V = V_+ - V_- = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I$

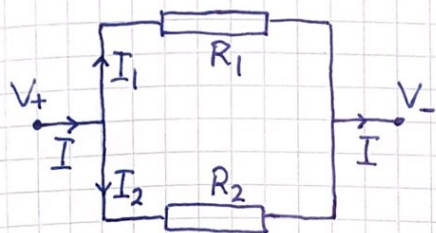
$\Rightarrow$ Total motstand: $R = V/I = R_1 + R_2$

N stk i serie: $R = \sum_{j=1}^N R_j$

Parallellkobling :

Lik spenning over R_1 og R_2 :

(68)



$$V = V_+ - V_- = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

Total strøm :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

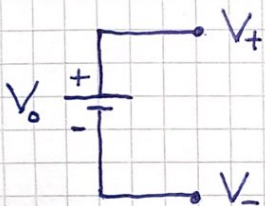
$$\Rightarrow \text{Total motstand : } R = \frac{V}{I} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$N \text{ stk i parallell : } R^{-1} = \sum_{j=1}^N R_j^{-1} \quad (\Rightarrow G = \sum_{j=1}^N G_j)$$

DC-kretser [OS 2 10 (9)]

DC = direct current = Likestrøm

Likespenningskilde :



Sørger for konstant spenning

$$V_0 = V_+ - V_-$$

mellom de to polene

Eks: Kjemisk batteri, Solcelle, Mobillader

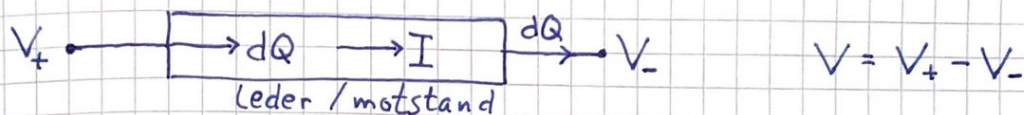
Kirchhoffs regler [OS 2 10.3]

K1: Ladningsbevarelse $\Rightarrow$ Null netto strøm i knutepunkt ;
dvs strøm inn = strøm ut. Velg f.eks. $I_j > 0$ inn mot og
 $I_j < 0$ ut av knutepunkt. Da er $\sum_j I_j = 0$ i alle knutepunkt.

K2: Energibevarelse $\Rightarrow$ Sum av alle potensialendringer
(spenninger) rundt lukket sløyfe er lik null. Velg f.eks. $V_j > 0$
for økning og $V_j < 0$ for reduksjon av potensialet.
Da er $\sum_j V_j = 0$ rundt alle sløyfer.

Elektrisk effekt [052 9.5]

(69)



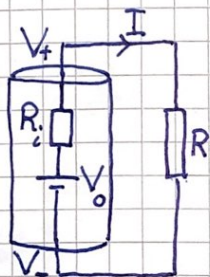
Effekt inn: $P_{inn} = dU_{inn}/dt = V_+ dQ/dt = V_+ I$

Effekt ut: $P_{ut} = dU_{ut}/dt = V_- dQ/dt = V_- I$

Effekttap i lederen: $P = P_{inn} - P_{ut} = (V_+ - V_-)I = VI$

Hvis ohmsk motstand: $V = RI \Rightarrow P = VI = RI^2 = V^2/R$

Eks 1: Reell vs ideell spenningskilde



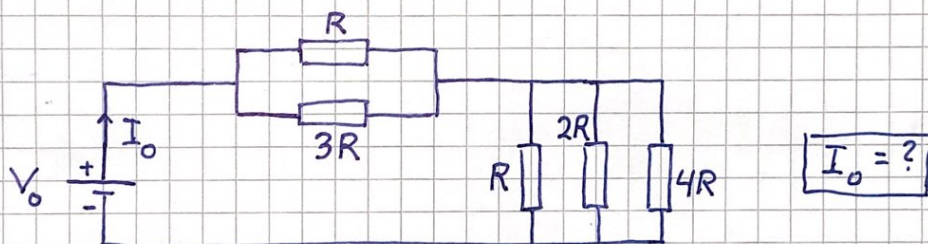
K2: $V_0 - R_i I - RI = 0 \Rightarrow I = \frac{V_0}{R_i + R}$

R_i = indre motstand

$R_i = 0$ i ideell spenningskilde

Polspenning: $V_+ - V_- = V_0 - R_i I < V_0$ (når $I > 0$)

Eks 2:



Løsning 2: $I_0 = V_0 / R_{TOT}$; R_{TOT} = kretsens totale motstand

$$R_{TOT} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{3R} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R} \right)^{-1}$$
$$= \frac{3R}{4} + \frac{4R}{7} = \frac{21R + 16R}{28} = \frac{37}{28} R$$

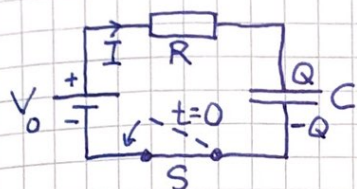
$$\Rightarrow I_0 = \frac{28 V_0}{37 R}$$

Fordeler seg med hhv $\frac{3}{4}$ og $\frac{1}{4}$ gjennom R og $3R$ i første parallellkobling og hhv $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{7}$ og $\frac{1}{7}$ gjennom R , $2R$ og $4R$ i andre parallellkobling.

RC-krets

[OS2 10.5]

(70)



Bryteren S lukkes ved $t=0$.

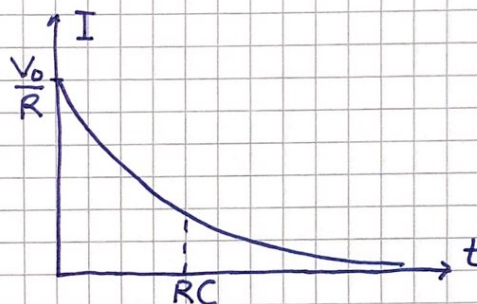
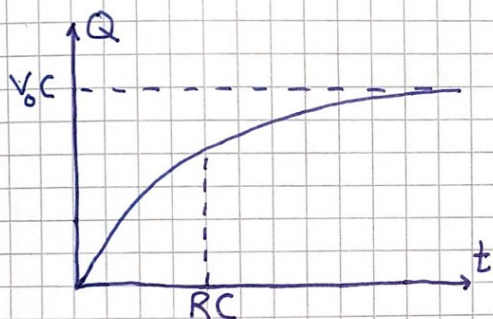
Finn $Q(t)$ og $I(t)$. Antar $Q(0)=0$.

$$K2: V_0 - RI - Q/C = 0 \quad ; \quad I = dQ/dt$$

$$\Rightarrow -RC \frac{dQ}{dt} = Q - V_0 C \quad \Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{Q - V_0 C}{-V_0 C} \right\} = - \frac{t}{RC}$$

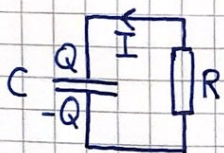
$$\Rightarrow \underline{Q(t) = V_0 C \{1 - e^{-t/RC}\}} \quad ; \quad \underline{I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}}$$



$\tau = RC =$ kretsens tidskonstant, en "målestokk" for hvor lang tid det tar å lade opp kondensatoren. Etter en tid $t=3\tau$ er $Q = 0.95 V_0 C$.

Anvendelser: Kupelys i bil; Intervall-vindusviskere; ...
(Senere: AC-kretser)

Utlading:



$$-\frac{Q}{C} - R \frac{dQ}{dt} = 0 \quad ; \quad Q(0) = Q_0$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} \quad ; \quad I(t) = - \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$$

Magnetostatikk

[OS2 11, 12]

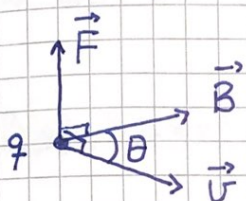
(71)

Magnetisk kraft

[OS2 11.2]

Strømmer og magneter omgir seg med et magnetfelt $\vec{B}$.

En ladning q med fart $\vec{v}$ i et magnetfelt $\vec{B}$ påvirkes av en magnetisk kraft:

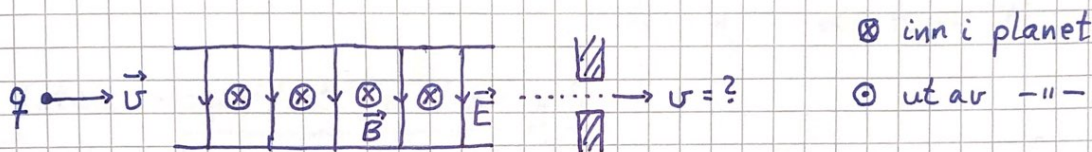


$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$F = qvB \sin \theta, \quad \vec{F} \perp \vec{v} \text{ og } \vec{B}$$

$$[B] = T \text{ (tesla)} ; \quad 1T = 10^4 G \text{ (gauss)}$$

Eks: Krysset $\vec{E}$ og $\vec{B}$; fartsfilter

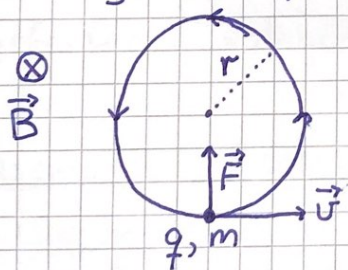


$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \text{Lorentzkraften}$$

$$q > 0 \Rightarrow \vec{F}_e \text{ ned, } \vec{F}_m \text{ opp} \Rightarrow \text{Ingen avbøyning hvis } \underline{v = E/B}$$

Ladning i uniformt $\vec{B}$ -felt

[OS2 11.3]



$$\text{Anta } \vec{v} \perp \vec{B}: F = qvB \text{ med } \vec{F} \perp \vec{v}$$

Gir sirkelbevegelse med konstant $|\vec{v}|$

$$\text{siden } P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$$

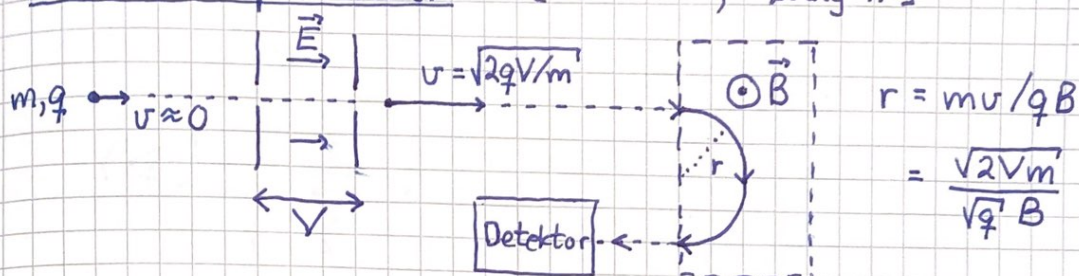
En eventuell komponent $\vec{v}_{||}$ parallelt med $\vec{B}$ endres ikke;
gir en spiralformet bane.

$$\text{N2: } qvB = mv^2/r \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

(syklotronfrekvensen)

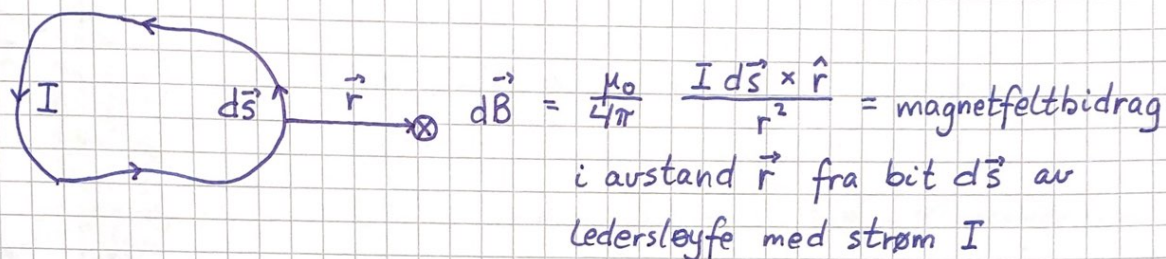
Eks: Massespektrometer [OS2 11.7 ; øving 11]

(72)



⇒ Ioner med ulik masse kan separeres

Biot-Savarts lov [OS2 12.1]



Totalt magnetfelt fra strømsløyfa:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{S} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{Biot og Savart (1820)}$$

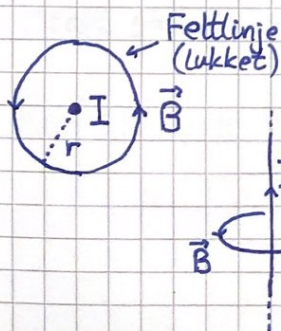
If. Coulombs lov: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq \hat{r}}{r^2}$

Vakuumpermeabiliteten: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}$

Lysfarten i vakuum: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Eksempler [OS2 12.2, 12.4, 12.6]

1. Lang og rett strømførende leder



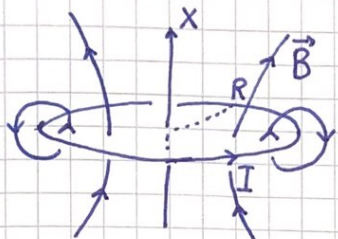
$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$; dvs tangentielt til sirkel med ledere i sentrum.

Høyrehandsregel (HHR):

Tommel langs I gir 4 fingre langs $\vec{B}$

2. Sirkulær strømsløyfe, $\vec{B}$ på symmetriaksen

(73)

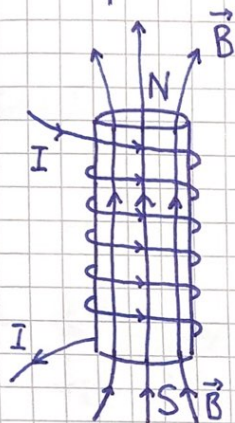


$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{x}$$

HHR: 4 fingre langs I gir tommel langs $\vec{B}$

$[x \gg R \Rightarrow B(x) \sim 1/x^3$; jf el.dipol s. 48]

3. Spole



Antar ideell spole: Lang og tettviklet

N viklinger på lengde l

$\Rightarrow$ vikleitet $n = N/l$

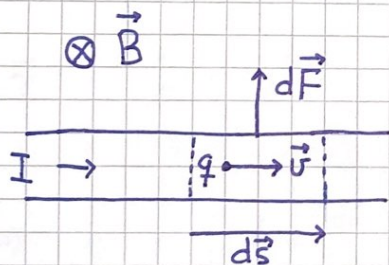
Gir uniformt felt inni spolen: $B = \mu_0 n I$

Retning: $\vec{B}$ fra S mot N

Utenfor spolen: $B \approx 0$ [jf. ideell kondensator]

HHR: som for strømsløyfe

Magnetisk kraft på strøm [OS2 11.4]



$d\vec{F} = N \cdot q \vec{v} \times \vec{B}$ = kraft på N frie ladninger q med midlere driftsfart $\vec{v}$ langs ledere; N frie ladninger på lengden ds

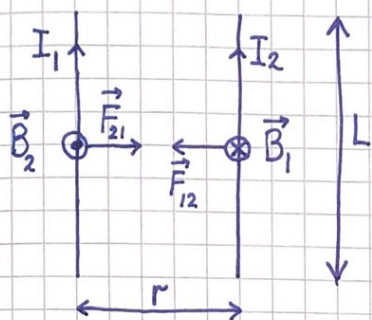
$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Nq}{ds/v} \Rightarrow Nq\vec{v} = I d\vec{s} \Rightarrow d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$$

$$\text{Kraft på hele ledere: } \vec{F} = \int d\vec{F} = I \int_{\text{leder}} d\vec{s} \times \vec{B}$$

Kraft på rett leder med lengde L i uniformt felt: $F = BIL$

Eks 1: Kraft mellom parallelle strømmer [OS2 11.4]

74



$B_j = \mu_0 I_j / 2\pi r$ = feltstyrke i avstand r fra leder j ($j=1,2$)

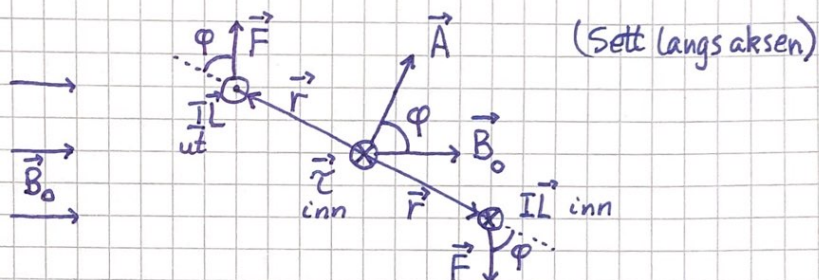
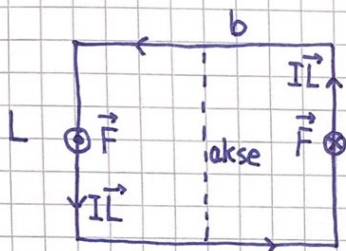
Innbyrdes kraft på lengde L :

$$F_{12} = F_{21} = F = \mu_0 I_1 I_2 L / 2\pi r$$

Pr lengdeenhet: $f = F/L = \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi r$

(Strømmer i motsatt retning gir frastøtning)

Eks 2: Dreiemoment på strømsløyfe i ytre felt $\vec{B}_0$



$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}_0 ; F = ILB_0 \quad (\vec{B}_0 \perp \vec{L})$$

$$\vec{A} = A \hat{n} = bL \hat{n} ; \hat{n} = \text{enhetsvektor } \perp \text{ strømsløyfa}$$

$$|\vec{\tau}| = |\sum \vec{r} \times \vec{F}| = 2 |\vec{r} \times \vec{F}| = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot ILB_0 \cdot \sin\varphi$$

$$= IAB_0 \sin\varphi = |I\vec{A} \times \vec{B}_0|$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B}_0$$

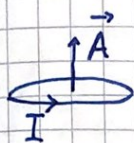
$$\text{Spole med } N \text{ viklinger: } \vec{\tau} = NI\vec{A} \times \vec{B}_0$$

Prinsipp for en likestrømsmotor (DC-motor)

Magnetisk dipol og dipolmoment [052 11.5]

(75)

strømsløyfe = magnetisk dipol

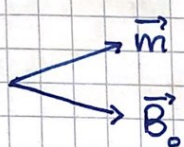


magn. dipolmoment $\stackrel{\text{def}}{=} \text{strøm} \cdot \text{omsluttet areal}$

$$\vec{m} = I \vec{A} \quad ; \quad [m] = \text{Am}^2$$

Spole med N viklinger: $\vec{m} = N I \vec{A}$

Dipol i ytre felt $\vec{B}_0$:



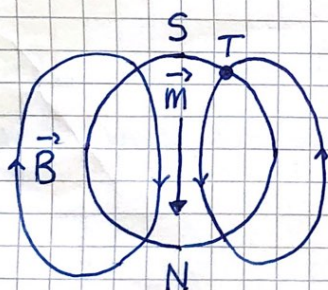
$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$$

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

If: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0$

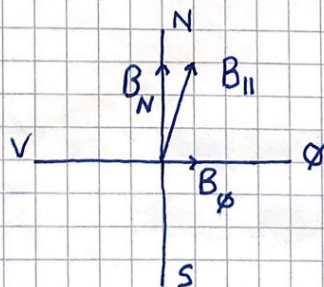
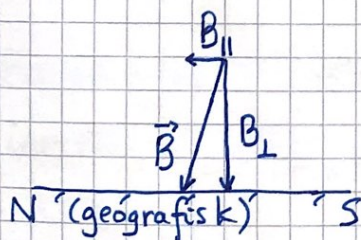
$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

Jorda er en stor dipol: $m \approx 8 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$



Med vår def. ligger magnetisk N nær geografisk S, og omvendt

Trondheim (T):



$$B = 0.522 \text{ G} \quad (52.2 \mu\text{T})$$

$$B_{\perp} = 0.504 \text{ G}$$

$$B_{\parallel} = 0.136 \text{ G}$$

$$B_N = 0.135 \text{ G}$$

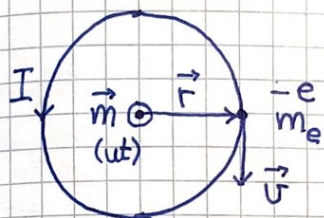
$$B_{\varnothing} = 0.012 \text{ G}$$

Magnetisme

[052 12.7]

(76)

Atomær dipol, klassisk modell:



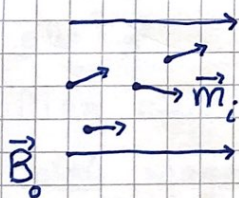
$$I = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{ev}{2\pi r} ; \quad A = \pi r^2$$
$$\Rightarrow m = IA = \frac{1}{2} evr$$
$$L = |\vec{r} \times \vec{p}| = rm_e v$$
$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow m = \frac{1}{2} evr \\ L = rm_e v \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{e}{2m_e} L$$

Med kvantemekanikk: Elementærpartiklene har kvantisert dreieimpuls L og spinn S , med størrelse omtrent $\hbar = h/2\pi$ der $h \approx 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js er Plancks konstant.

Det betyr at atomers magn. dipolmoment er av størrelsesorden

$$\mu_B = eh/2m_e \approx 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 = 1 \text{ Bohr magneton}$$

Dreiemomentet $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$ gir innretting av atomenes $\vec{m}$ langs et ytre felt $\vec{B}_0$:



Magnetisering $\stackrel{\text{def}}{=}$ dipolmoment pr volumenhet

$$\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i / V ; \quad [M] = \text{A/m}$$

Paramagnet: Atomære $\vec{m}$ får en liten tendens til innretting langs et ytre felt $\vec{B}_0$. Eks: Al, Na, Mg

Diamagnet: Atomære $\vec{m} = 0$ uten et ytre felt. Et ytre felt $\vec{B}_0$ induserer et lite dipolmoment $\vec{m}$ i motsatt retning av $\vec{B}_0$. Eks: Cu, Au, Hg

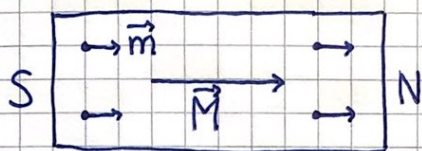
Ferromagnetisme

(77)

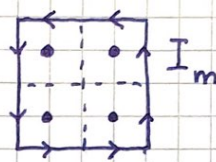
Fe, Ni, Co, Gd og legeringer som $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ har atomære $\vec{m}$ som vekselvirker med sine naboer slik at parallelle $\vec{m}$ foretrekkes, dvs gir lavest energi.

Da er materialet ferromagnetisk.

En permanent magnet har parallelle $\vec{m}$ i hele materialet:



Sett "forfra":

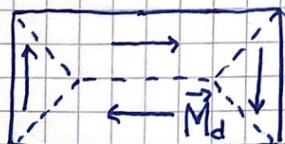


Indre strømmer (----) kansellerer. Får en bundet magnetiseringsstrøm i overflaten, I_m .

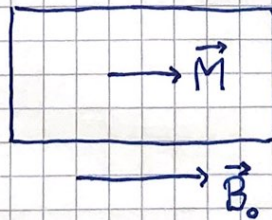
[Jf. bundet overflateladning på isolator i ytre felt $\vec{E}_0$.]

I en "umagnetisk" ferromagnet (f.eks stål) er det mange domener [volum $(1-100\mu\text{m})^3$]. I et gitt domene peker alle $\vec{m}$ i samme retning og gir stor magnetisering $\vec{M}_d$. Men ulike domener har $\vec{M}_d$ i ulike retninger, slik at total magnetisering blir $\vec{M} \approx 0$.

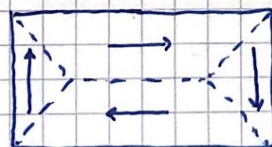
I et ytre felt $\vec{B}_0$ blir materialet en magnet, pga innretting av de ulike $\vec{M}_d$ langs $\vec{B}_0$:



$B_0 = 0$



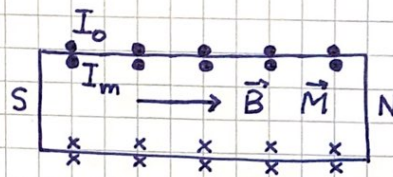
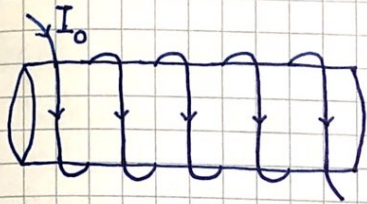
Og hvis ytre felt skrues av igjen:



$M \approx 0$

Lineær respons; anta spole med jernkjerne.

(78)



$$I_0 = \text{spolestrøm (pr vikling)} \Rightarrow B_0 = \mu_0 n I_0$$

$$I_m = \text{magnetiseringsstrøm (pr vikling)} \Rightarrow B_m = \mu_0 n I_m$$

$$\text{Totalt felt inni spolen: } B = \mu_0 n (I_0 + I_m) = B_0 + B_m$$

Antar B_m prop. med B_0 , dvs B prop. med B_0 , og skriver

$$B = \mu_r B_0 \text{ der } \mu_r = \text{materialets relative permeabilitet}$$

Dermed:

$$B = \mu_r \mu_0 n I_0 = \mu n I_0 \text{ der } \mu = \mu_r \mu_0 = \text{materialets permeabilitet}$$

Noen tallverdier:

	vakuum	Al	Cu	Fe 99.8%	Rustfritt stål
μ_r	1	1.000022	0.999994	5000	750-1800

Eks 1: $N = 400$, $l = 10 \text{ cm}$, $I_0 = 0.1 \text{ A}$, $\mu_r = 750$.

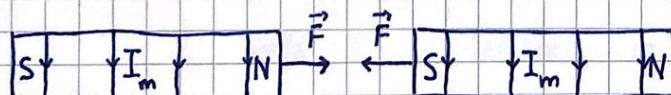
Finn B , samt I_m pr vikling.

Løsn1: $B = \mu n I_0 = \mu_r \mu_0 (N/l) I_0 = 750 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{400}{0.10} \cdot 0.1 \text{ T} = \underline{\underline{0.38 \text{ T}}}$

$$B = \mu_0 n (I_0 + I_m) = \mu_r \mu_0 n I_0$$

$$\Rightarrow I_0 + I_m = \mu_r I_0 \Rightarrow I_m = (\mu_r - 1) I_0 \approx \mu_r I_0 = \underline{\underline{75 \text{ A}}}$$

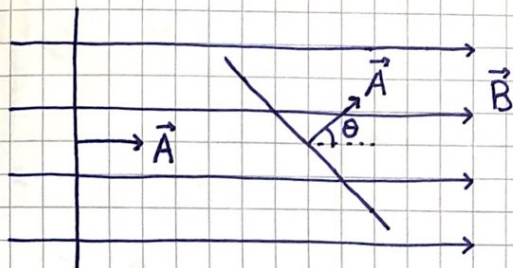
Eks 2: Netto kraft mellom to magneter



Parallell strømmer (på samme side av hver magnet) nærmere hverandre enn antiparallell strømmer (på motsatt side av hver magnet) gir netto tiltrekning mellom N og S.

Magnetisk fluks [OS2 13.1]

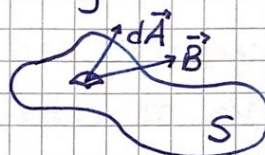
Vi betrakter flater i et område med magnetfelt $\vec{B}$:



Flest feltlinjer gjennom en flate når den står normalt på $\vec{B}$, dvs når $\vec{A} \parallel \vec{B}$.

$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \theta$ = magnetisk fluks gjennom flate med areal A når vinkelen mellom $\vec{B}$ og $\vec{A}$ er θ

Generelt: $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$

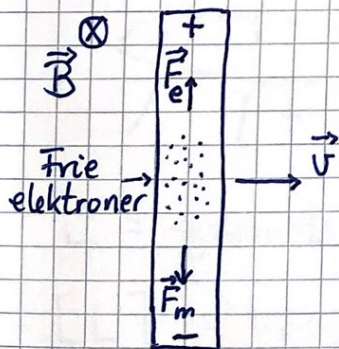


Enhet: $[\Phi] = \text{Tm}^2 = \text{Wb}$ (weber)

Fra før vet vi at B er prop. med antall feltlinjer pr flateenhet. Da må Φ være prop. med antall feltlinjer gjennom flaten.

Faradays induksjonslov [OS2 13.1]

Vi betrakter en leder med lengde l som dras med fart $\vec{v}$ gjennom et uniformt magnetfelt $\vec{B}$: Da virker $\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}$ på de frie elektronene i lederen.

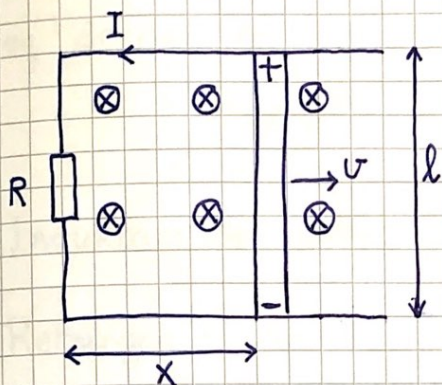


$\Rightarrow$ Netto ladning, negativ, nederst og netto ladning, positiv, øverst.

Dermed skapes (induseres) et elektrisk felt $\vec{E}$ i lederen, og dermed en elektromotorisk spenning $\Delta V = E \cdot l$ mellom lederens ender.

Likevekt når $F_e = F_m \Rightarrow eE = evB \Rightarrow E = vB \Rightarrow \Delta V = vBl$

ΔV kan så drive en strøm i en lukket krets:



$$\Delta V = vBl = \frac{dx}{dt} Bl = \frac{d}{dt} (xBl)$$

$$= \frac{d}{dt} (B \cdot A) = \frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot \vec{A}) = \frac{d\Phi}{dt}$$

som er Faradays induksjonslov:

Indusert spenning i lukket sløyfe tilsvarer endring i omsluttet fluks pr tidsenhet.

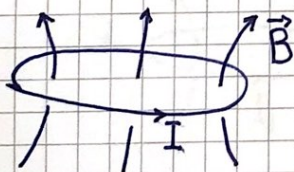
Lenz' Lov [OS2 13.2]

Strengt tatt er $\Delta V = -d\Phi/dt$, der fortegnet uttrykker at indusert strøm I skaper et felt $\vec{B}_I$ og en tilhørende omsluttet fluks $\Phi_I = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$ som motvirker den påtrungne fluksendringen $\Delta\Phi$, som i utgangspunktet induserte ΔV og I .

I figuren ovenfor: Økt fluks inn i planet påtvinges. Da går indusert strøm I mot klokka slik at tilhørende omsluttet fluks Φ_I er positiv ut av planet.

Induktans og induksjon [OS2 14.1, 14.2]

Selvinduktans:



Pga Biot-Savarts lov er B prop. med I .

Da er også omsluttet fluks prop. med I :

$$\Phi = L \cdot I$$

L = systemets (selv-)induktans

$$[L] = \text{Wb/A} = \text{H (henry)}$$

$$\text{Biot-Savart} \Rightarrow [\mu] = [B \cdot l / I] = \text{T} \cdot \text{m/A}$$

$$\text{Nå: } [L] = \text{Wb/A} = \text{Tm}^2/\text{A}$$

$$\Rightarrow [\mu] = \text{H/m}$$

$$[\text{Jf. } [E] = \text{F/m}]$$

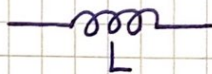
Selinduksjon: En endring dI gir $d\Phi = L dI$

(81)

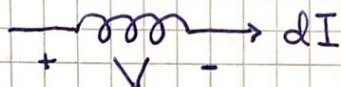
og dermed en indust (mot-)spenning

$$V = - \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

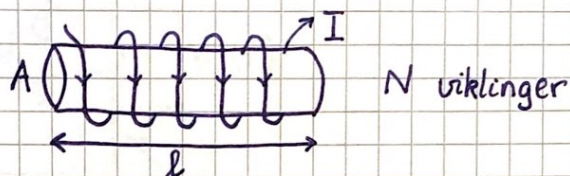
Induktans som kretselement:



Retningen (Fortegnet) på V slik at strømindringen motvirkes:



Eks: Ideell spole



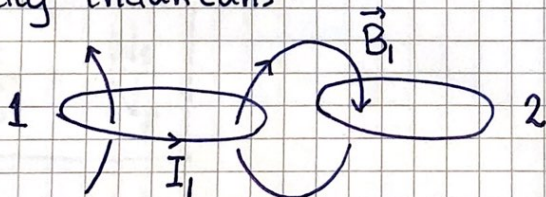
$$B = \mu_0 n I ; n = N/l$$

$$\Phi = NBA = (\mu_0 N^2 A / l) I \Rightarrow L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 N^2 A / l$$

Med ferromagnetisk kjerne: $\mu_0 \rightarrow \mu = \mu_r \mu_0$ (med $\mu_r \gg 1$)

$$\Rightarrow L = \mu_r \mu_0 N^2 A / l$$

Gjensidig induktans:



$I_1 \Rightarrow \vec{B}_1 \Rightarrow \Phi_2$ omsluttet av sløyfe 2

B_1 prop. med $I_1 \Rightarrow \Phi_2$ prop. med I_1

$\Rightarrow$ Vi kan skrive $\Phi_2 = M_{21} I_1$; og omvendt $\Phi_1 = M_{12} I_2$

Og fra Biot-Savarts lov følger $M_{21} = M_{12} = M$, som er sløyfenes gjensidige induktans, med enhet $[M] = H$.

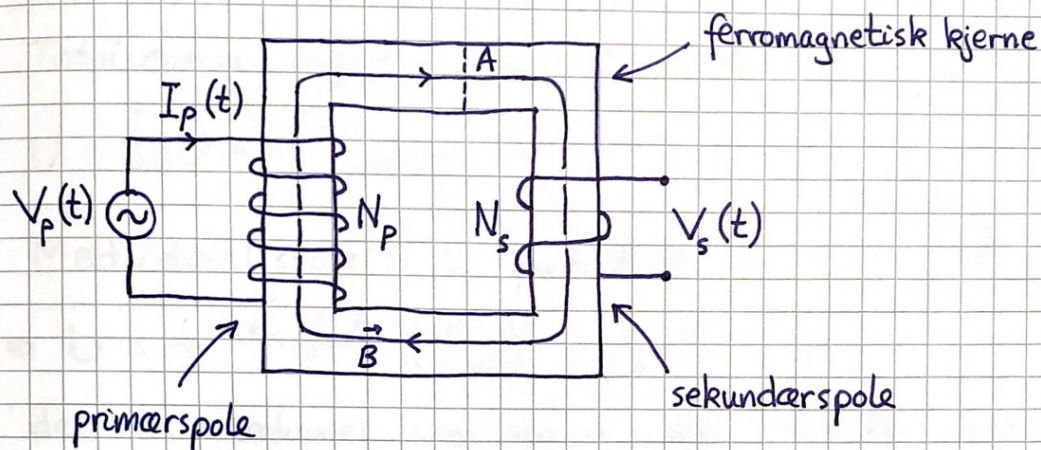
Gjensidig induksjon: $dI_1 \Rightarrow d\Phi_2 = M dI_1$

$$\Rightarrow V_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

og omvendt,

$$V_1 = \cancel{M \frac{dI_2}{dt}} - M \frac{dI_2}{dt}$$

Eks: Transformator



$I_p(t)$ skaper $\vec{B}(t)$ i transformator-kjernen

$$\Phi_p(t) = N_p B(t) A \quad ; \quad \Phi_s(t) = N_s B(t) A$$

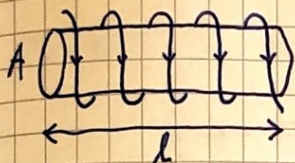
$$V_p(t) = \dot{\Phi}_p(t) = N_p A \dot{B}(t) \quad ; \quad V_s(t) = \dot{\Phi}_s(t) = N_s A \dot{B}(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p}}$$

Dvs, amplituden til $V_p(t)$ kan transformeres ned ($N_s < N_p$) eller opp ($N_s > N_p$).

Energi i $\vec{B}$ -felt [OS2 14.3]

(83)



Å øke strømmen fra i til $i + di$ krever et arbeid, for å overvinne induisert motspenning
 $v = L \cdot di/dt$

Tilført energi når $i \rightarrow i + di$:

$$dU = P dt = v i dt = L (di/dt) i dt = L i di$$

Total energi lagret i spolen når i økes fra 0 til I :

$$U = \int dU = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2$$

Med ideell spole: $L = \mu_0 N^2 A / l$; $I = \frac{B}{\mu_0 N / l}$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \left(\frac{Bl}{\mu_0 N} \right)^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot (Al)$$

der Al = volumet inni spolen, der $B \neq 0$ ($B=0$ utenfor)

$$\Rightarrow u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \text{energi pr volumenhet i et } \vec{B}\text{-felt}$$

Med både $\vec{E}$ og $\vec{B}$ i et område:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Eks: Elektromagnetiske bølger

$$\vec{v} = c \hat{x}; \quad \vec{E} = E_0 \hat{y} \cos(kx - \omega t); \quad \vec{B} = B_0 \hat{z} \cos(kx - \omega t) \quad (\text{s.60})$$

Fra Maxwells ligninger følger $B_0 = E_0 / c$.

Videre er $\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$ (middelverdi over en periode)

Dermed:

$$\langle u_E \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cdot \frac{1}{2}; \quad \langle u_B \rangle = \langle u_E \rangle \quad \text{siden} \quad \frac{1}{\mu_0 c^2} = \epsilon_0$$

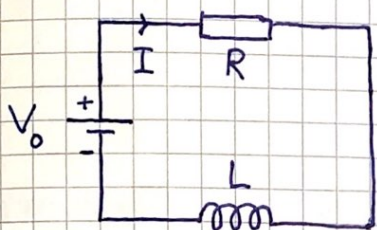
$$\Rightarrow \langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad (= \frac{1}{2\mu_0} B_0^2)$$

Avsluttende eksempler

[OS2 14, 15]

(84)

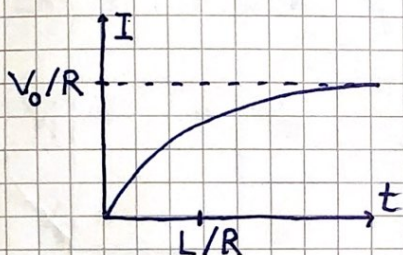
Eks 1: RL-krets



Finn $I(t)$ når V_0 kobles til ved $t = 0$.

K2: $V_0 - RI - L\dot{I} = 0$; samme ligning for $I(t)$ nå, som den vi hadde for $Q(t)$ i RC-kretsen; dermed samme løsning:

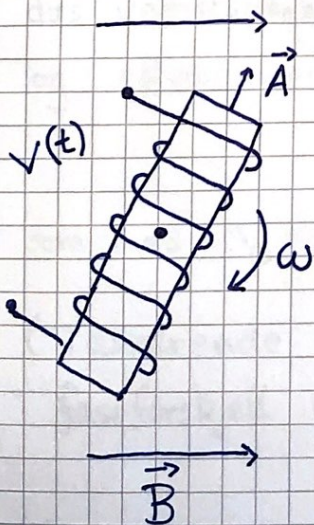
$$I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{med tidskonstant } \tau = L/R$$



Pga induert motspenning i spolen tar det tid å øke strømmen, fra $I=0$ til $I_{\max} = V_0/R$

Eks 2: Vekselspanning

Vann og vind kan drive en turbin og rotere en spole i et magnetfelt (evt rotere en magnet nær en spole):



Omsluttet fluks: $\Phi(t) = NBA \cos \omega t$

Indusert vekselspanning

(AC: alternating current):

$$V(t) = -\dot{\Phi}(t) = V_0 \sin \omega t$$

med amplitude $V_0 = NBA\omega$

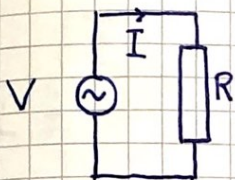
Frekvens: $f = \omega/2\pi$; Europa: 50 Hz

Kretssymbol:



Eks 3: Effektivverdier

(85)



$$K2: V_0 \sin \omega t - RI = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0 \sin \omega t, \text{ med } I_0 = V_0 / R$$

$$\text{Effekttap: } P(t) = V(t)I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$$

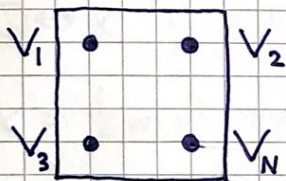
$$\text{Midlere effekttap: } \langle P \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0$$

Effektivverdier (rms-verdier) defineres ved

$$\langle P \rangle = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \quad \text{med } V_{\text{rms}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad \text{og } I_{\text{rms}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Stikk-kontakten i veggen: } V_{\text{rms}} = 230 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 325 \text{ V}$$

Eks 4: 3-fase og 400 V



$$V_1 = V_0 \sin \omega t$$

$$V_2 = V_0 \sin(\omega t + 2\pi/3)$$

$$V_3 = V_0 \sin(\omega t + 4\pi/3)$$

$$V_N = 0$$

(nøytralleder)

Med $\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ får vi:

$$\begin{aligned} V_{21} = V_2 - V_1 &= 2 V_0 \cos(\omega t + \pi/3) \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \sqrt{3} V_0 \cos(\omega t + \pi/3) \end{aligned}$$

dvs vekselspanning med frekvens $\omega/2\pi$, amplitude $\sqrt{3} V_0$ og effektivverdi

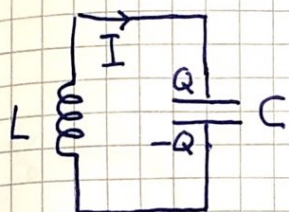
$$(V_{21})_{\text{rms}} = \frac{\sqrt{3} V_0}{\sqrt{2}}$$

som med $V_0 = 325 \text{ V}$ er $(V_{21})_{\text{rms}} = 400 \text{ V}$

(Tilsvarende for V_{32} og V_{31} da innbyrdes faseforskjell uansett er $2\pi/3$)

Eks 5: LC-krets og mekanisk analogi

(86)



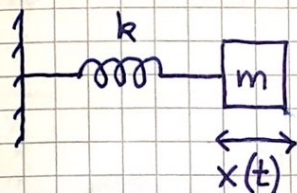
$$K2: -L\dot{I} - \frac{Q}{C} = 0 \quad ; \quad I = \dot{Q}$$

$$\Rightarrow \ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Hvis f.eks. $Q = Q_0$ og $I = 0$ ved $t = 0$:

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t \quad ; \quad I(t) = -\omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t$$

Mekanisk analogi:



$$N2: -kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Hvis f.eks. $x = x_0$ og $v = 0$ ved $t = 0$:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t \quad ; \quad v(t) = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t$$

Analoge størrelser i de to systemene:

$$Q \leftrightarrow x \quad ; \quad I \leftrightarrow \dot{x} \quad ; \quad L \leftrightarrow m \quad ; \quad C \leftrightarrow 1/k$$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} L I^2 \quad ; \quad U = \frac{1}{2} k x^2 \leftrightarrow \frac{Q^2}{2C}$$

Fra før vet vi at det mekaniske svingesystemet er konservativt, uten tap (dissipasjon) av energi.

Da må også LC-kretsen være et konservativt system:

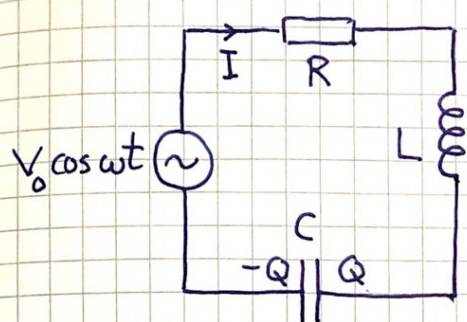
$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} L \underbrace{\omega_0^2}_{=1/C} Q_0^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$= \frac{Q_0^2}{2C} (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t)$$

$$= \frac{Q_0^2}{2C} \quad \text{uavhengig av } t, \quad \text{OK.}$$

Eks 6: RLC resonanskrets

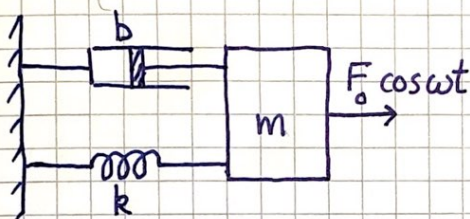
(87)



$$K2: V_0 \cos wt - R\dot{Q} - L\ddot{Q} - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \cos wt$$

Mekanisk analogi:



$$N2: F_0 \cos wt - b\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos wt$$

Analoge størrelser:

$$b \leftrightarrow R ; \quad F_0 \leftrightarrow V_0$$

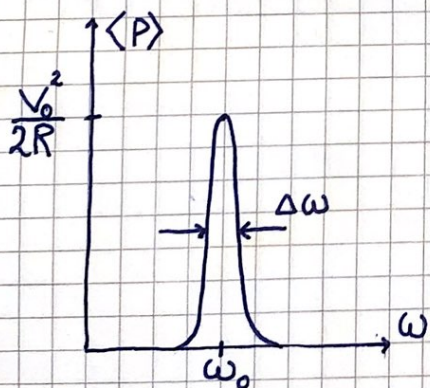
Da må $Q(t)$ bli på samme form som $x(t)$: (s.39)

$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi) ; \quad Q_0(\omega) = V_0 C \cdot \frac{\omega_0^2}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{1/2}}$$

der $\gamma = R/2L$ og $\omega_0^2 = 1/LC$.

$$\text{Strøm: } I(t) = \dot{Q}(t) = I_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi) ; \quad I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$$

$$\text{Tilført effekt: } \langle P \rangle(\omega) = \langle V(t) \cdot I(t) \rangle = \text{tapt effekt i R}$$



På resonans: $\omega = \omega_0$

Da er $L\ddot{Q} + Q/C = 0$ slik at

$$RI = V_0 \cos \omega_0 t, \text{ og dermed er}$$

$$\langle P \rangle = \langle V \cdot I \rangle = (V_0^2/R) \cdot \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \frac{V_0^2}{2R}$$

Halvverdbredde: $\Delta\omega = 2\gamma = R/L$

$$\text{Godhetsfaktor (Q-faktor): } \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$