

størrelser og enheter [051 1]

①

SI : Système international d'unités

Grunnenheter :

størrelse	enhet	
lengde	meter (m)	} mekanikk
masse	kilogram (kg)	
tid	sekund (s)	
strøm	ampere (A)	} elmag
temperatur	kelvin (K)	
stoffmengde	mol (mol)	} termodynamikk
lysstyrke	candela (cd)	

Sammensatte enheter :

fart m/s

akselerasjon m/s²

Avledete enheter :

kraft kg m/s² = N (newton)

energi N m = J (joule)

Siden 20/5-2019 er grunnenhetene definert via fastsatte eksakte verdier for naturkonstanter :

lysfarten i vakuum $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$

elementærladningen $e = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Plancks konstant $h = 6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

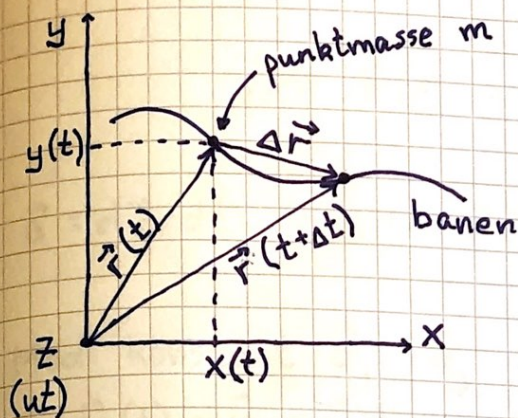
Boltzmanns konstant $k_B = 1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

Avogadros konstant $N_A = 6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Notasjon : $[l] = \text{m}$; "enhet for lengde er meter"

Kinematikk

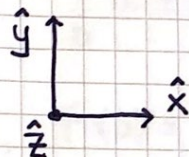
[OS1 (2) 3, 4]



Posisjon ved tid t :

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

Enhetsvektorer (kartesiske):



Notasjon:

- ut
- $\times$ inn

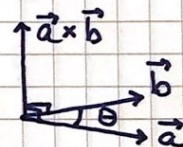
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1 ; [\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \text{ (dimensjonsløse)}$$

$$\text{skalarprodukt: } \hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 ; \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

$$\text{kryssprodukt: } \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \text{ osv (høyrehåndregel)}$$

$$\hat{x} \times \hat{x} = 0$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = a \cdot b \cdot \cos \theta ; |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \theta$$



Forflytning i løpet av Δt : $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$

Hastighet (fart) $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Forflytning pr tidsenhet:}$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} ; \vec{v} \parallel \Delta \vec{r} \text{ (tangent til banen)}$$

Akselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Fartsendring pr tidsenhet:}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} ; \vec{a} \parallel d\vec{v}$$

Komponenter (kartesiske):

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} ; v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \text{ osv}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} ; a_x = d^2x/dt^2 = \ddot{x} \text{ osv}$$

$\vec{r}$ og $\vec{v}$ er integralet av hhv $\vec{v}$ og $\vec{a}$:

③

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

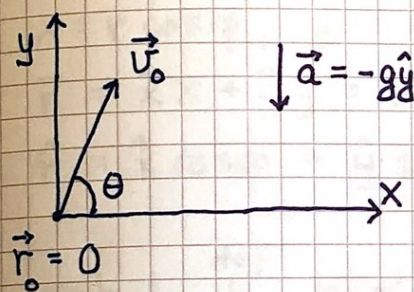
$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

Med konstant $\vec{a}$, og $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2$$

Eks: TIFY4104 5/12-24 nr 3, kast i tyngdefeltet



$$v_0 = 25 \text{ m/s}, \quad \theta = 60^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Hva er t når $y = y_{\max}$?

$$\text{Løsn: } \vec{v} = \vec{v}_0 - gt \hat{y} ; \quad \vec{r} = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \hat{y}$$

$$v_y = v_0 \sin \theta - gt = 0 \quad \text{når } y = y_{\max}$$

$$\Rightarrow t = v_0 \sin \theta / g = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 60^\circ / 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{\underline{2.2 \text{ s}}}$$

$$\text{Banen: } x(t) = v_0 t \cos \theta \Rightarrow t = x / v_0 \cos \theta$$

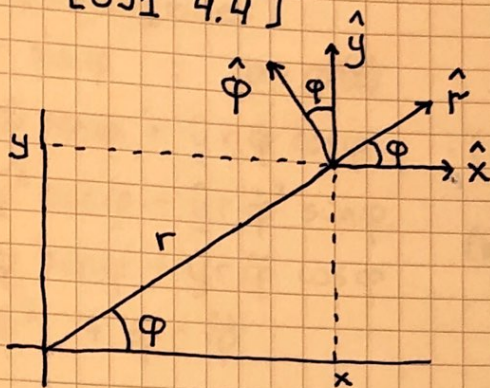
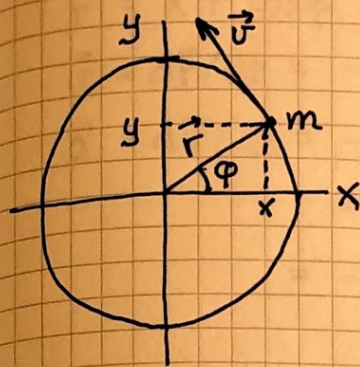
$$y(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) = x \tan \theta - gx^2 / 2 v_0^2 \cos^2 \theta \quad (\text{parabel})$$

Sirkelbevegelse

[051 4.4]

(4)



Polarkoordinater:

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\hat{r}$ ($\varphi > 0$ mot klokke)

Ser fra figuren:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x)$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x}r\cos\varphi + \hat{y}r\sin\varphi = \hat{r}r$$

$$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi, \quad \hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi = d\hat{r}/d\varphi$$

vinkel $\stackrel{\text{def}}{=} \text{buelengde} / \text{radius}$



$$d\varphi = ds/r; \quad [\varphi] = 1 \text{ (evt rad)}$$

vinkelfart $\stackrel{\text{def}}{=} \text{omløpt vinkel pr tidsenhet}$

$$\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi}; \quad [\omega] = 1/s \text{ (evt rad/s)}$$

vinkelakselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=} \text{endring i vinkelfart pr tidsenhet}$

$$\alpha = d\omega/dt = \dot{\omega} = d^2\varphi/dt^2 = \ddot{\varphi}; \quad [\alpha] = 1/s^2 \text{ (evt rad/s}^2\text{)}$$

Ser fra figuren: $\vec{v} \parallel \hat{\varphi}; \quad \vec{v} \perp \vec{r}$

$$v = |\vec{v}| = \frac{d|\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{r d\varphi}{dt} = r\omega \quad \left. \vphantom{\frac{ds}{dt}} \right\} \Rightarrow \vec{v} = r\omega \hat{\varphi}$$

Praktisk å la vektoren $\vec{\omega}$ peke langs rotasjonsaksen.

Da er $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. ($\vec{\omega} = \omega \hat{z}$; rot. mot klokke i xy-planet)

Akselerasjon i sirkelbevegelse:

(5)

$$\vec{r} = \hat{x} r \cos\varphi + \hat{y} r \sin\varphi \quad ; \quad \varphi = \varphi(t)$$

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt = -\hat{x} r \dot{\varphi} \sin\varphi + \hat{y} r \dot{\varphi} \cos\varphi$$

(kjerneregul)

$$\vec{a} = d\vec{v}/dt = -\hat{x} r \ddot{\varphi} \cos\varphi - \hat{y} r \ddot{\varphi} \sin\varphi$$

(kjerne- og produktregel)

$$-\hat{x} r \ddot{\varphi} \sin\varphi + \hat{y} r \ddot{\varphi} \cos\varphi$$

$$= -\hat{r} r \dot{\varphi}^2 + \hat{\varphi} r \ddot{\varphi}$$

Sentripetalaks: $\vec{a}_{\perp} = -\hat{r} r \omega^2 = -\hat{r} v^2/r$

inn mot sirkelens sentrum

Baneaks: $\vec{a}_{\parallel} = \hat{\varphi} r \alpha = \hat{\varphi} r \dot{\omega} = \hat{\varphi} \dot{v}$

tangentielt til sirkelbanen

Uniform sirkelbevegelse når ω og v er konstante.

Da er $a_{\parallel} = 0$ og $a = a_{\perp} = v^2/r$

Periode $\stackrel{\text{def}}{=}$ tid pr omløp

$$T = 2\pi r/v = 2\pi/\omega \quad ; \quad [T] = s$$

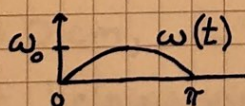
Frekvens $\stackrel{\text{def}}{=}$ antall omløp pr tidsenhet

$$f = 1/T = \omega/2\pi \quad ; \quad [f] = 1/s = \text{Hz (hertz)}$$

TFY 4104 12/8-25 nr 3-6:

Karusell, start ved $t=0$, stopp ved $t \approx 157$ s. Vinkelfart

$$\omega(t) = \omega_0 \sin \omega_1 t \quad ; \quad \omega_0 = 0.20 \text{ rad/s}, \quad \omega_1 = 0.020 \text{ rad/s}$$

③ $\omega_{\max} = ?$  $\Rightarrow \omega_{\max} = \omega_0 = \underline{\underline{0.20 \text{ rad/s}}}$

④ Oles fart 4.0 m fra sentrum, ved $t = 20$ s?

$$v = r\omega = 4.0 \cdot 0.20 \cdot \sin(0.4) \text{ m/s} = 0.31 \text{ m/s} = \underline{\underline{31 \text{ cm/s}}}$$

⑤ Oles akselerasjon ved $t = 78.5$ s? $a_{\parallel} \approx r\omega_0\omega_1 \cos(\pi/2) = 0$

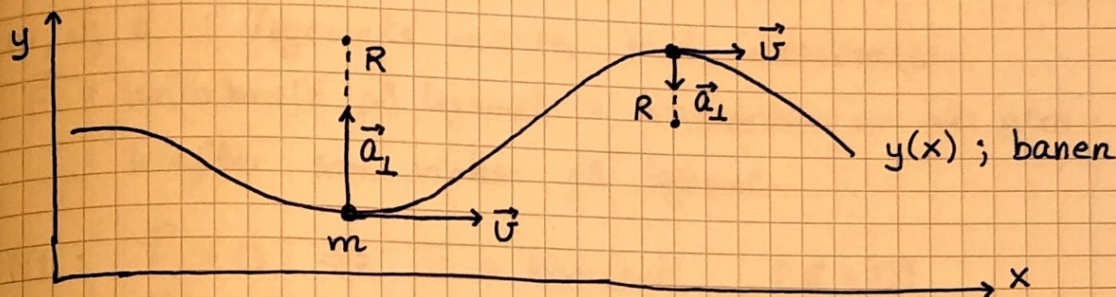
$$\Rightarrow a = a_{\perp} = r\omega_0^2 \sin^2(\pi/2) = 4.0 \cdot 0.20^2 \text{ m/s}^2 = \underline{\underline{0.16 \text{ m/s}^2}}$$

⑥ Antall runder totalt?

$$N = \phi/2\pi = (2\pi)^{-1} \int_0^{157} \omega(t) dt = \frac{\omega_0}{2\pi\omega_1} \Big|_0^{157} (-\cos \omega_1 t) = \frac{\omega_0}{\pi\omega_1} = \underline{\underline{3.2}}$$

Beregelse langs krum bane:

(6)



R = banens krumningsradius = radius i sirkel som best tangerer banen $y(x)$

Utleidet i notater 2019, s. 10-11:

$$R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|} \quad ; \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

- $a_{\perp} = v^2/R$, inn mot sirkelens sentrum
- $y' = 0$ i topp- og bunnpunkter $\Rightarrow R = |y''|^{-1}$
- $y'' = 0$ i vendepunkter $\Rightarrow R \rightarrow \infty$, $a_{\perp} = 0$
- banens helningsvinkel:

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

TFY4104 12/8-25 nr 7:

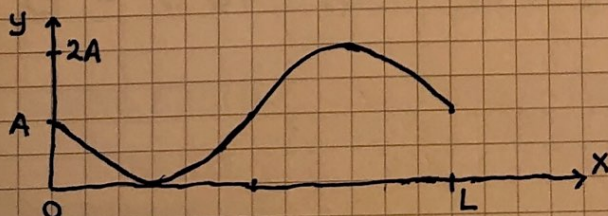
$$y(x) = A [1 - \sin(2\pi x/L)]$$

$$A = 10.0 \text{ cm}, \quad L = 140.0 \text{ cm}$$

Hva er helningsvinkelen i $x = 0$?

$$\text{Løsn: } dy/dx = -A \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot \cos(2\pi x/L)$$

$$\Rightarrow |\theta(0)| = \arctan(2\pi A/L) = \arctan\left(\frac{\pi}{7}\right) = \underline{\underline{24^\circ}}$$



Newtons lover

[OS1 5, 6]

(7)

$m, \vec{v}, \vec{a}$: legemets masse, fart, akselerasjon

$\vec{F}$ = netto kraft på legemet = vektorsum av alle ytre krefter som virker på legemet

N1: $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant} \quad (\vec{a} = 0)$

N2: $\vec{F} = m\vec{a}$

N3: Krefter er vekselvirkninger mellom legemer.

Hvis legeme 1 virker på legeme 2 med kraft $\vec{F}_{12}$,
virker legeme 2 på legeme 1 med kraft $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

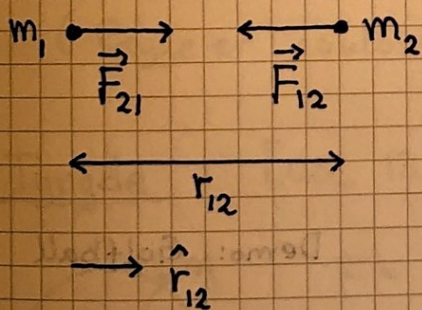
$[F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$ (newton)

Impuls (= bevegelsesmengde) : $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{F} = m d\vec{v}/dt = d(m\vec{v})/dt = d\vec{p}/dt$$

Fundamentale naturkrefter [OS1 13.1 ; OS2 5.3]

- Gravitasjon (tyngdekraft): Svak tiltrekning mellom masser



Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

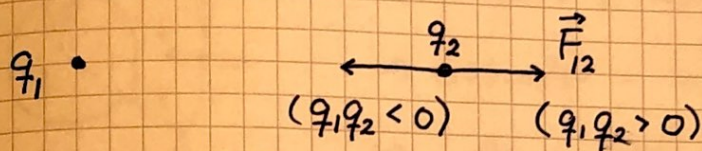
Den universelle gravitasjonskonstanten:

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2$$

- Coulombkraft (elektrostatisk kraft):

(8)

Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger



Coulombs lov:
$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}$$

$[q] = C$ (coulomb)

Vakuumpermittiviteten: $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

- Kjernekrefter: Svake og sterke krefter med kort rekkevidde. Årsak til radioaktivitet og stabilitet av atomkjerner.

Viktig i mekanikk er:

- Tyngdekraften fra jorda, og mellom himmellegemer
- Kontaktkrefter: Normalkraft og friksjonskraft. (Begge er coulombkrefter.)

Tyngde

[OS1 13.2, 5.4]



$F = GmM/R^2 = \text{tyngden av } m$

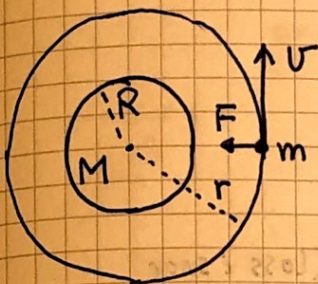
Jorda: $M \approx 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $R \approx 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$

$\Rightarrow F = mg$; $g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2 =$
tyngdens akselerasjon ved jordas overflate

Fritt fall når mg er eneste kraft på m ; N2 gir da $a=g$

Satellittbaner: Sirkel omkring jordas sentrum

⑨



$$F = GMm/r^2, \quad a = v^2/r, \quad F = ma$$

$$\Rightarrow GMm/r^2 = mv^2/r$$

$$\Rightarrow \underline{v^2 r = GM} \quad (r > R)$$

Eks 1: Hvor høyt over ekrator, og hvor fort, går en geostasjonær satellitt?

Løsn 1: Må ha periode $T \approx 24 \text{ h} = 2\pi/\omega = 2\pi r/v$. Da har vi to ligninger for r og v , med entydig løsning:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 r = GM \Rightarrow r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx \underline{4.22 \cdot 10^7 \text{ m}}$$

$$\text{Og dermed } v \approx \underline{3 \text{ km/s}} \quad (h = r - R \approx 36000 \text{ km})$$

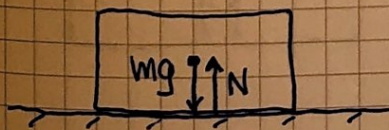
Eks 2: Hva er minimum tidsforsinkelsen ved kommunikasjon via en geostasjonær satellitt?

Løsn 2: Signalets fart er $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; strekningen er minst $2 \cdot h \approx 7.2 \cdot 10^7 \text{ m}$

$$\Rightarrow \Delta t \geq 2h/c \approx \underline{0.24 \text{ s}}$$

Kontaktkrefter [051 5.6, 6.2, 6.4, 14.3]

Normalkraft: N = normalkomponenten av kontaktkraften mellom to legemer

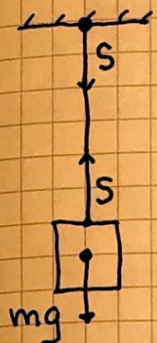


Hvis klossen ligger i ro:

$$N = mg \quad \text{pga } N \perp$$

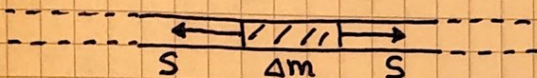
Snorkraft: S = kraft fra snora på legemet som snora er festet til

(10)

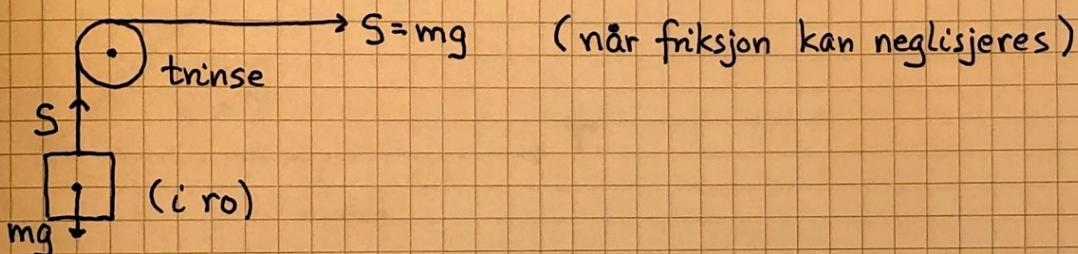


Hvis klossen i ro: $S = mg$ (pga N1)

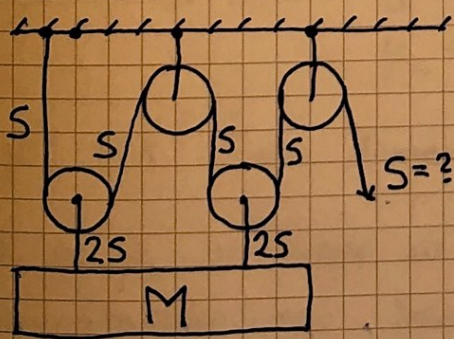
Har konstant S i lette utstrekke snorer:



Trinse: Endrer retningen på $\vec{S}$



Talje:



N1 for kassa:

$$4S = Mg$$

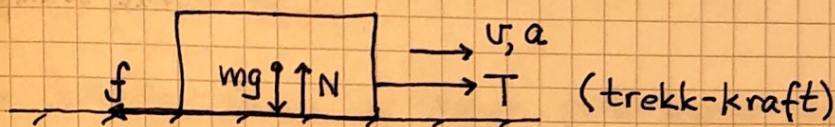
$\Rightarrow$ Kan løfte kassa med kraft $S \geq \frac{1}{4}Mg$

Friksjon [OS1 6.2]

①①

f = tangentialkomponenten av kontaktkraften mellom to legemer; $\vec{f}$ motsetter seg (forsøk på) relativ bevegelse

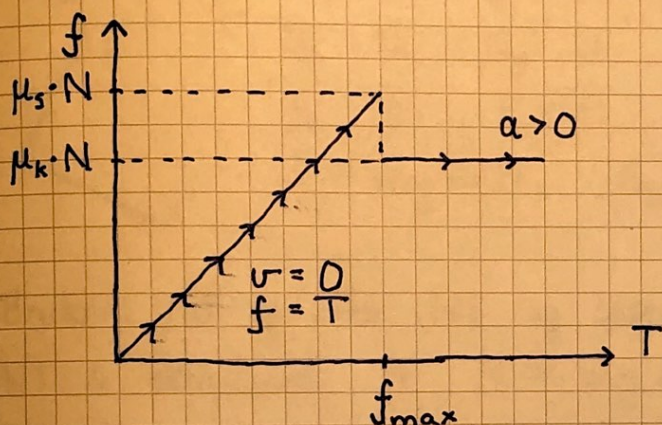
Empirisk:



$N \perp \text{bordet} \Rightarrow N = mg$

$N \parallel \text{---} \Rightarrow T - f = ma \Rightarrow f = T - ma$

Målinger av m , T og a gir:

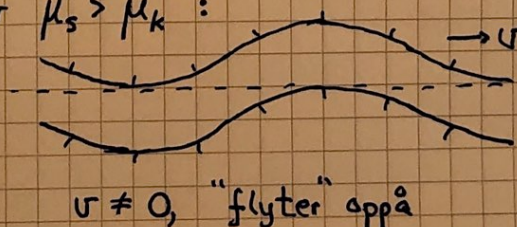
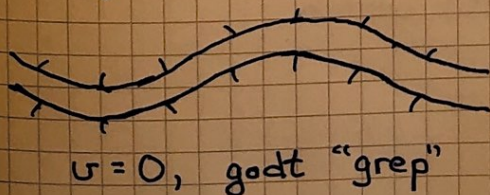


Statisk friksjon: $f \leq f_{\max} = \mu_s N$
 μ_s = statisk friksjonskoeffisient

Kinetisk friksjon: $f = \mu_k N$
 μ_k = kinetisk friksjonskoeffisient

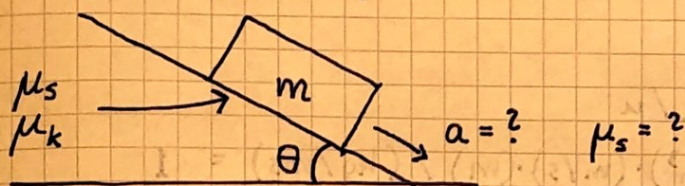
$[\mu] = 1$ (dvs dimensjonsløs)

μ_s og μ_k avhenger av type materialer og hvor glatte overflatene er. Som regel er $\mu_s > \mu_k$:

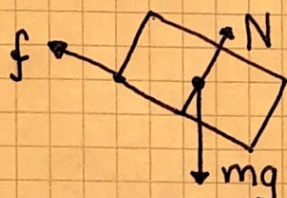


Eks : Masse på skråplan

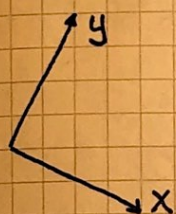
(12)



Finner ytre krefter på m og tegner fritt-legeme-diagram:



Velger koordinatsystem og dekomponerer kreftene:



$$N_x = 0, \quad N_y = N$$

$$f_x = f, \quad f_y = 0$$

$$G_x = mg \sin \theta, \quad G_y = mg \cos \theta$$

Bruker $N1$ og/eller $N2$ og løser ligningene:

$$N1 \perp \text{skråplanet} \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$N2 \parallel \text{---} \Rightarrow mg \sin \theta - f = ma$$

$$\text{Statisk } (v=0, a=0) : f = mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta = f_{\max}$$

$$\text{Kinetisk : } f = \mu_k mg \cos \theta \Rightarrow \underline{a = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}$$

Begynner å gli ved helningsvinkel $\theta_{\max}$ fastlagt ved

$$f = f_{\max}$$

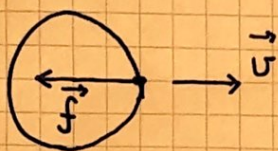
$$\Rightarrow mg \sin \theta_{\max} = \mu_s mg \cos \theta_{\max}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu_s = \tan \theta_{\max}}}$$

Friksjon i fluider

[OS1 6.4, 14.7]

(13)



Omgivende fluid (gass eller væske):

Massetetthet ρ

Dynamisk viskositet μ

Luft : $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$

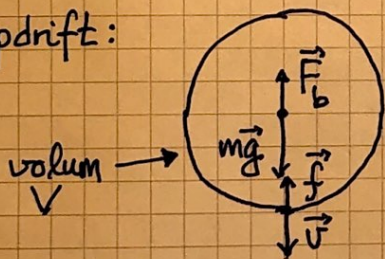
Vann : $\rho = 10^3 \text{ ---}$, $\mu = 10^{-3} \text{ ---}$

Liten u : Ordnet, laminnær strømming av fluidet rundt legemet, $\vec{f} = -k\vec{u} = -k u \hat{u}$.

Kule, radius r : $k = 6\pi\mu r$ (Stokes' lov)

Stor u : Uordnet, turbulent strømming av fluidet, $\vec{f} = -\frac{1}{2} \rho A C_d u^2 \hat{u}$; C_d = drag-koeffisient, mindre jo mere aerodynamisk form ; A = legemets tverrsnitt målt på tvers av $\vec{u}$. Kule, radius r : $A = \pi r^2$, $C_d \approx 0.5$

Oppdrift:



$\vec{F}_b = -\rho V \vec{g}$ = tyngden av
fortrengt fluidmengde
(Arkimedes' prinsipp)

Terminalfart : Max fart ved fall i tyngdefeltet, u_t

$$N1 \Rightarrow \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{f} + \vec{F}_b = m\vec{g}$$

Hvis legemet har mye større massetetthet enn fluidet, kan som regel oppdrift neglisjeres. Da er $f(u_t) = mg$.

Men generelt : $f(u_t) = mg - \rho V g = (\rho_s - \rho) V g$

der

ρ_s = legemets massetetthet