

Impuls. Kollisjoner. Rakettprinsipp

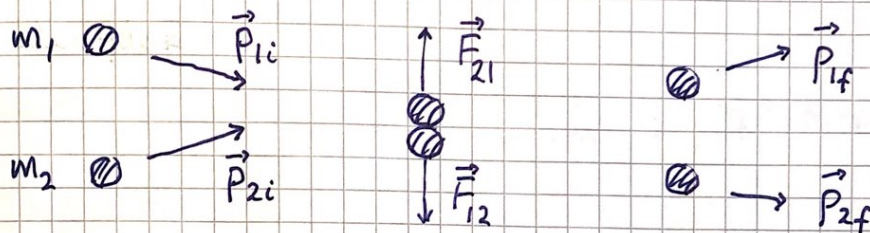
[0519] (26)

Fra før: $\vec{p} = m\vec{v}$ = massens impuls ; $[p] = \text{kg m/s}$

$$N2: \vec{F} = d\vec{p}/dt$$

Impulsbevarelse: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p}$ er bevart

Må gjelde i kollisjoner (støt) dersom ytre krefter kan neglisjeres i kollisjonen:



$$N3 \Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0 \xRightarrow{N2} d\vec{p}_1/dt + d\vec{p}_2/dt = 0$$

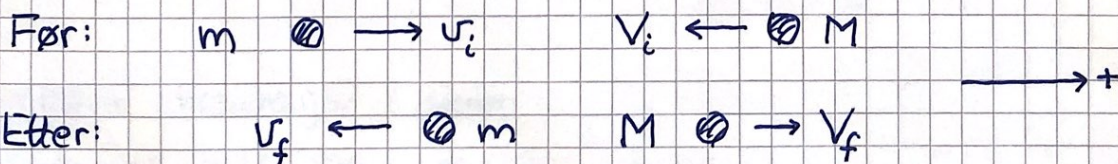
$\Rightarrow$ Systemets totale impuls $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ endres ikke i støtet

Men: Kinetisk energi kan gå tapt pga friksjon, deformasjon..

Elastisk støt: $\Delta K = 0$ Uelastisk støt: $\Delta K < 0$

Fullstendig uelastisk støt: Legemene henger sammen med felles slutfart etter kollisjonen. Gir maksimal $|\Delta K|$.

Vi ser kun på kollisjon i 1D: Sentralt støt



$$\text{Uansett er } \Delta p = 0 : m v_i + M V_i = m v_f + M V_f \quad (1)$$

Hvis fullstendig uelastisk: $v_f = V_f = (m v_i + M V_i) / (m + M)$

$$\text{Elastisk : } \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} M V_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} M V_f^2 \quad (2) \quad (27)$$

Løser (1) og (2) og får:

$$v_f = \frac{M}{m+M} \left(2v_i + v_i \cdot \frac{m-M}{M} \right) ; \quad V_f = \frac{m}{M+m} \left(2v_i + v_i \cdot \frac{M-m}{m} \right)$$

Eks: Ball mot vegg

$$m \otimes \rightarrow v_i \quad \left\{ \begin{array}{l} M \rightarrow \infty \\ V_i = 0 \end{array} \right.$$

$$v_f = ? \quad \otimes m \quad \left\{ \begin{array}{l} M \\ V_f = ? \end{array} \right.$$

$$\text{Løsn: } v_f = \frac{M}{m+M} \cdot v_i \cdot \frac{m-M}{M} = \underline{\underline{-v_i}} ; \quad V_f = \frac{m}{M+m} \cdot 2v_i = \underline{\underline{0}}$$

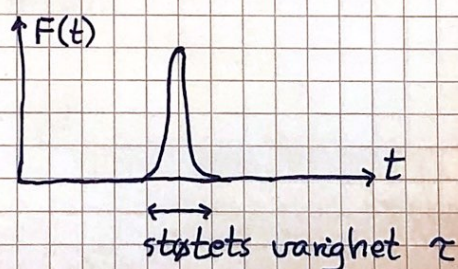
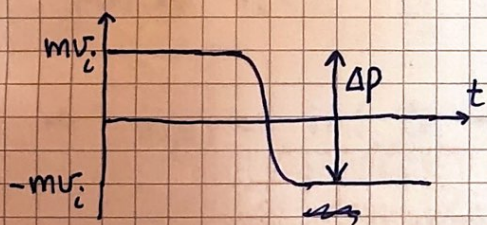
Impulsbevarelse?

$$m v_i = m v_f + M V_f = -m v_i + M \cdot \frac{m}{M+m} \cdot 2v_i = -m v_i + 2m v_i = \underline{\underline{m v_i}} \quad (\text{OK})$$

Kraftstøt:

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt \Rightarrow \Delta\vec{p} = \int d\vec{p} = \int \vec{F}(t) dt$$

Eks: Ball mot vegg



Midlere akselerasjon i støtet:

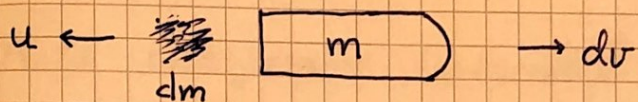
$$\text{Anta } v_i = 10 \text{ m/s} \quad \text{og} \quad \tau = 2 \text{ ms}$$

$$\langle a \rangle = \Delta v / \Delta t = 20 \text{ m/s} / 2 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 10^4 \text{ m/s}^2 \gg g \approx 10 \text{ m/s}^2$$

Dvs OK å neglisjere ytre kraft mg i "kollisjonsøyeblikket"

Rakettprinsipp

(28)

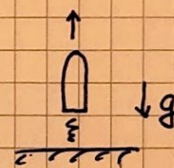


Eksos, masse dm pr tidsenhet, sendes ut av raketten med fart u .
Impulsbevarelse gir raketten akselerasjon:

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} = F_{\text{skyt}}$$

I tyngdefeltet kommer tyngdekraften i tillegg.

Oppskyting: $m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} - mg$



Anta $v(0) = 0$ og konstante u og g .

Mult. lign. med dt/m og integrer fra $t=0$:

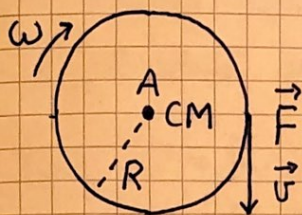
$$\int_0^{v(t)} dv = u \int_{m(0)}^{m(t)} \frac{dm}{m} - g \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow v(t) = u \ln \frac{m(t)}{m(0)} - gt$$

Her er $u < 0$ og $m(t) < m(0)$

$$\Rightarrow v(t) = |u| \ln \frac{m(0)}{m(t)} - gt$$

Anta rotasjonsakse (og dermed $\vec{\omega}$) med fast orientering



Tilført effekt:

$$1) P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = F \cdot R \cdot \omega$$

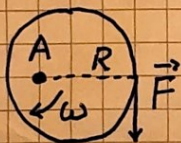
$$2) P = dK/dt = \frac{1}{2} I_0 d\omega^2/dt = I_0 \omega d\omega/dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I_0 \frac{d\omega}{dt}}$$

N2 for rotasjon om akse med fast orientering

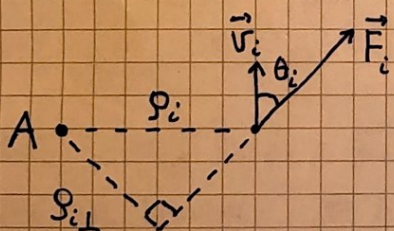
Kraftens dreiemoment: $\tau = F \cdot R$

Kan ha rotasjon om akse som ikke går gjennom CM:



$$\tau = I \dot{\omega} ; \tau = F \cdot R$$

Og mer generelt kan vi ha flere krefter som bidrar til totalt dreiemoment:



$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_i v_i \cos \theta_i$$

$$= \sum_i F_i r_i \omega \cos \theta_i = \tau \cdot \omega$$

med

$$\tau = \sum_i F_i r_i \cos \theta_i = \sum_i F_i r_{i\perp}$$

Kraftens arm:

$r_{i\perp}$ = avstand fra rot.aksen (A) til
forlengelseslinjen til $\vec{F}_i$

$$P = dW/dt \quad \text{og} \quad P = \tau \omega = \tau d\phi/dt$$

(30)

slik at

$$dW = \tau d\phi$$

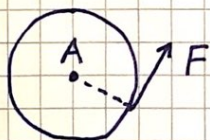
er arbeid utført av dreiemoment τ når omløpt vinkel er $d\phi$.

Er på samme form som $dW = F \cdot dx$.

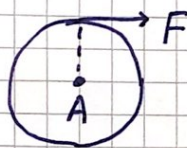
Hvis $P = \vec{F} \cdot \vec{v} > 0 : \dot{\omega} > 0$ (vinkelfarten øker)

$P = \vec{F} \cdot \vec{v} < 0 : \dot{\omega} < 0$ (— " — avtar)

"Fortegn" på τ :

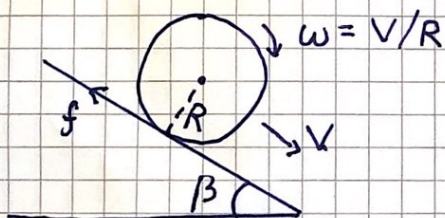


ω øker mot klokka



ω øker med klokka

Eks 1: Ren rulling på stråplan (se s. 24-25)



$$N2 : Mg \sin \beta - f = M \dot{v}$$

$$N2, \text{ rot. om CM: } \tau = I_o \dot{\omega} = c MR^2 \cdot \dot{v}/R$$

Ytre dreiemoment: $\tau = f \cdot R$ ($\vec{N}$ og $M\vec{g}$ har null arm!)

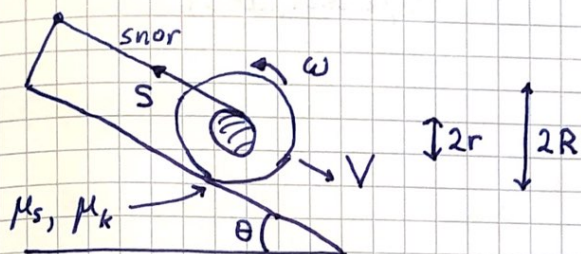
$$\Rightarrow f = c M \dot{v} \quad \Rightarrow \dot{v} = \frac{g \sin \beta}{1+c}$$

$$\text{og} \quad f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta$$

} som før

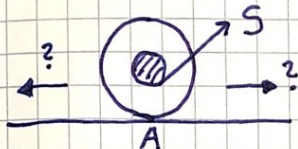
Eks 2: Snelle baklengs på skråplan (øving 6)

(31)



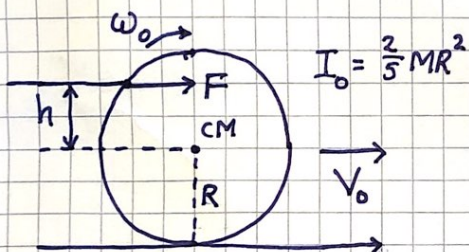
- Ved hvilken vinkel θ_0 begynner snella å gli og rotere baklengs?
- Hva er S og $\dot{V}$ når $\theta > \theta_0$?

Eks 3: Hvilken vei ruller snella?



Tips: Vurder "fortegnet" på snordragets dreiemoment relativt kontaktlinjen A!

Eks 4: Snooker [OS1 11.1]



Antar kort horisontalt støt over ($h > 0$) eller under ($h < 0$) senterlinjen gjennom CM, med kraft F .

Neglisjerer friksjon f i selve støtet.

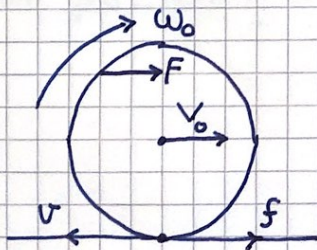
Retten etter støtet (med varighet Δt): Fart V_0 og vinkelfart ω_0

$$N2: F = \Delta p / \Delta t = M V_0 / \Delta t$$

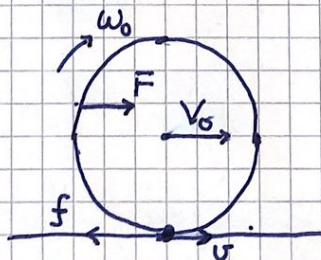
$$N2 \text{ rot. om CM: } \tau = I_0 \Delta \omega / \Delta t \Rightarrow F \cdot h = \frac{2}{5} M R^2 \cdot \omega_0 / \Delta t$$

Ren rulling hvis $\omega_0 = V_0 / R$; da må vi ha $h = \frac{2}{5} R$.

"Sluning":



$h > 2R/5 \Rightarrow \omega_0 > V_0/R$
 V øker, ω avtar



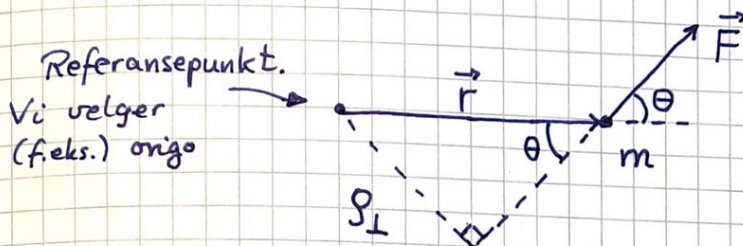
$h < 2R/5 \Rightarrow \omega_0 < V_0/R$
 V avtar, ω øker

Rotasjonsdynamikk med vektorer

(32)

Nødvendig når rot.aksen (og $\vec{\omega}$) endrer retning.

Dreiemoment [OS1 10.6]



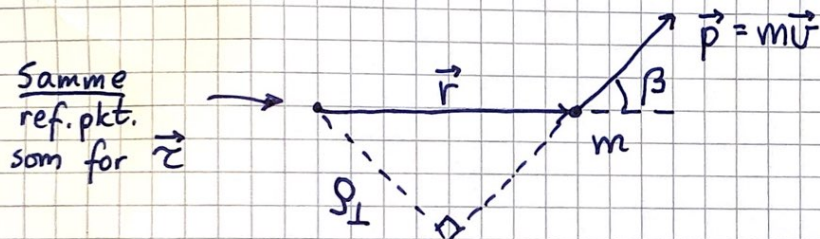
$\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \text{kraftens dreiemoment (relativt origo)}$

$\vec{\tau} \perp \vec{r} \text{ og } \vec{F}$ (Her: ut av planet, med HHR)

$\tau = |\vec{\tau}| = r F \sin \theta = s_{\perp} F$; $s_{\perp} = \text{kraftens arm (som før)}$

Med flere ytre krefter: $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Dreieimpuls [OS1 11.2]



$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \text{massens dreieimpuls (relativt origo)}$

$\vec{L} \perp \vec{r} \text{ og } \vec{p}$

$L = |\vec{L}| = r p \sin \beta = s_{\perp} p$

Med partikkelsystem: $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

evt. $\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm$

N2 for rotasjon

[OS1 11.2]

(33)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \quad (\text{siden } \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0)$$

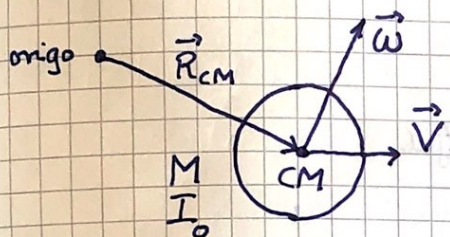
ders $\boxed{\vec{\tau} = d\vec{L}/dt}$

- På samme form som $\vec{F} = d\vec{p}/dt$
- Statisk likevekt, $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$, hvis $\vec{F} = 0$ og $\vec{\tau} = 0$

$\vec{L}$ for stivt legeme

[OS1 11.2]

Antar at legemet er uendret ved rotasjon 180° om rot.aksen



Eks: Jorda, med sola i origo

$$R_{CM} \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km}, \quad V \approx 30 \text{ km/s}$$

$$\frac{2\pi}{\omega} \approx 24 \text{ h}, \quad \frac{2\pi R_{CM}}{V} \approx 365 \text{ d}$$

Fra def. ($\vec{L} = \int \vec{r} \times d\vec{p}$; se notat for utledning) får vi:

$$\vec{L}_s = I_O \vec{\omega} = \text{indre dreieimpuls (spinn)}$$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = \text{banedreieimpuls}$$

$$\text{Total dreieimpuls: } \vec{L} = \vec{L}_s + \vec{L}_b$$

- $\vec{L}_b$ avhenger av ref.pkt., $\vec{L}_s$ er uavh. av ref.pkt.
- Hvis CM i ref.pkt.:

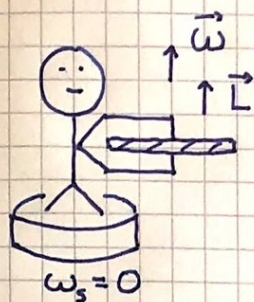
$$R_{CM} = 0, \quad L_b = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_s = I_O \vec{\omega}$$

Hvis akse med fast orientering:

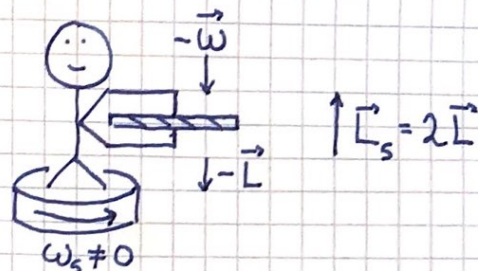
$$\tau = dL/dt = I_O \dot{\omega} \quad \text{som før}$$

Eks 1: Konstant $\vec{L}$ på kontorstol

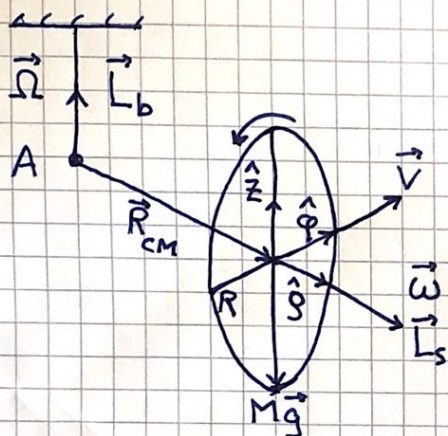
(34)



Hjulet snus
 $\vec{r} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{L} = 0$



Eks 2: Presesjon [OS1 11.4]



$$I_o \approx MR^2$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}, R_{cm} \approx 0.2 \text{ m}$$

$$T_\Omega = 2\pi/\Omega \approx 5 \text{ s}$$

$$\omega \gg \Omega$$

Bestem T_ω

Løsning:

- Velg A som ref.pkt. og bruk $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$
- $\vec{\tau} = \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} = R_{cm} Mg \hat{\phi}$
- $\omega \gg \Omega \Rightarrow L_s \gg L_b \Rightarrow \vec{L} \approx \vec{L}_s = I_o \vec{\omega} = MR^2 \omega \hat{\phi}$
- $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} \Rightarrow R_{cm} Mg \hat{\phi} = MR^2 \omega d\hat{\phi}/dt$
- $\hat{\phi}$ roterer om z-aksen med vinkelhastighet $\Omega \Rightarrow d\hat{\phi}/dt = \Omega \hat{\phi}$
- Dermed: $R_{cm} Mg = MR^2 \omega \Omega \Rightarrow \omega = R_{cm} g / R^2 \Omega$
- Med $\omega = 2\pi/T_\omega$ og $\Omega = 2\pi/T_\Omega$:

$$T_\omega = (2\pi R)^2 / (R_{cm} g T_\Omega)$$

Her: $\pi R \approx 1 \text{ m}$, $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ og $R_{cm} T_\Omega \approx 1 \text{ m} \cdot \text{s}$

$\Rightarrow T_\omega \approx 0.4 \text{ s}$ dvs ca 2.5 omløp pr sekund
(150 rpm)