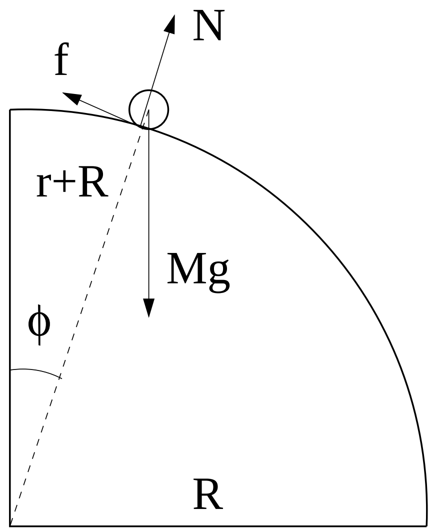
TFY4104 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2016.
Obligatorisk numerikkøving.

Innleveringsfrist: Søndag 13. november kl 23.59.

Volleyball på kvartsirkel

Kvalitativ beskrivelse



Vi er fra før kjent med rulling på et skråplan. Her kompliseres bildet ved at skråplanet er byttet ut med et sirkelformet underlag (radius R). Massesenteret (CM) til ballen (radius r) vil dermed følge en sirkelbane (radius $r+R$) i stedet for en rett linje. I tillegg til akselerasjon langs banen ($A = dV/dt$) får ballen en sentripetalakselerasjon rettet inn mot sirkelbanens sentrum ($A_\perp = V^2/(r+R)$). Ved rulling på skråplanet er både normalkraften N og friksjonskraften f konstante størrelser. Nå vil både N og f endres underveis, slik at bevegelsen endres fra ren rulling til sluring.

Volleyballen kan betraktes som et kuleskall. Treghetsmomentet mhp en akse gjennom massesenteret er da

$$I_0 = 2Mr^2/3.$$

Friksjonskraftens dreiemoment mhp rotasjonsaksen, $\tau = fr$, sørger for at ballen begynner å rulle og at vinkelhastigheten ω øker:

$$fr = I_0 \frac{d\omega}{dt}.$$

Fra toppen og et stykke nedover vil ballen rulle rent, uten å slure. Da er rullebetingelsene oppfylt,

$$V = r\omega \quad ; \quad A = r\frac{d\omega}{dt}.$$

Men etter hvert som helningen og vinkelen ϕ øker, blir normalkraften N - og dermed den maksimale friksjonskraften $f_{\max} = \mu_s N$ - mindre og mindre, og til slutt for liten til at ren rulling kan opprettholdes. Ballen går ved en viss vinkel ϕ_r over til å slure (dvs rulle og gli), med vinkelhastighet $\omega < V/r$. Det betyr at relativ hastighet mellom ball og underlag ikke lenger er lik null i kontaktpunktet (slik tilfellet er ved ren rulling), men snarere $v_{\text{rel}} = V - r\omega > 0$. Friksjonskraften endrer karakter, fra statisk friksjon ($f \le \mu_s N$) så lenge $\phi < \phi_r$, til kinetisk friksjon ($f = \mu_k N$) når $\phi > \phi_r$. Før eller senere, ved en vinkel ϕ_k, blir banen så bratt og farten V så stor at normalkraften N reduseres til null. Her mister ballen kontakten med underlaget, og bevegelsen til massesenteret kan deretter beskrives som et skrått kast.
Mekanisk energi er bevart så lenge ballen ruller rent eller faller fritt. (Så lenge vi kan neglisjere rullefriksjon og luftmotstand. La oss anta det her.) På intervallet $\phi_r < \phi < \phi_k$ taper ballen mekanisk energi tilsvarende friksjonsarbeidet som underlaget utfører på ballen. Effekttapet er gitt ved produktet av friksjonskraften og relativhastigheten i kontaktpunktet:

$$P_f = \frac{dW_f}{dt} = -f\,v_{\text{rel}} = -\mu_k N(V - r\omega).$$

Det er, som alltid, Newtons 2. lov (N2) som beskriver bevegelsen til ballens massesenter (CM). Ligningene blir som for rulling på skråplanet, langs banen:

$$Mg\sin\phi - f = MA,$$

og normalt banen (positiv retning inn mot sirkelbanens sentrum),

$$Mg\cos\phi - N = M\frac{V^2}{r+R}.$$

CM følger som sagt en sirkelbane med radius $r + R$, og vinkelhastigheten Ω for denne sirkelbevegelsen er gitt ved

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt}.$$

Hastigheten V og vinkelhastigheten Ω til CM har sammenhengen

$$V = (r+R)\Omega.$$

I starten, så lenge $0 < \phi \leq \phi_r$, har vi som sagt ren rulling. Da gjelder sammenhengene (se forelesningseksempel om rulling på skråplan, med $c = 2/3$):

$$\begin{aligned} f &= \frac{2MA}{3} \\ A &= \frac{3g\sin\phi}{5} \end{aligned}$$

Med andre ord,

$$f = \frac{2Mg\sin\phi}{5}.$$

Vinkelen ϕ_r for overgangen fra ren rulling til sluring bestemmes av ligningen

$$f = f_{\max} = \mu_s N.$$

Det kan vises at denne betingelsen resulterer i ligningen

$$\frac{11}{3}\cos\phi_r - 2 = \frac{2}{3\mu_s}\sin\phi_r.$$

Denne ligningen kan løses analytisk: Sett $x = \cos\phi_r$, $\sqrt{1-x^2} = \sin\phi_r$, og kvadrer på begge sider av ligningen. Dette gir en andregradsligning for x, der den ene av de to løsningene (den største x-verdien) tilsvarer den aktuelle ϕ_r i 1. kvadrant ($0 < \phi_r < \pi/2$). Men strengt tatt trenger du ikke denne løsningen: I programmet ditt kan du ganske enkelt sammenligne verdiene for f og $f_{\max}$ underveis, der du i utgangspunktet antar ren rulling og $f = 2MA/3$. Dersom $f \leq f_{\max}$, *har* vi ren rulling, som antatt. Dersom $f > f_{\max}$, har vi *ikke lenger* ren rulling, hvoretter vi endrer friksjonskraften (til $f = \mu_k N$, som gjelder for sluring) og andre berørte størrelser (som A, ω etc). Dette gir en numerisk fastleggelse av ϕ_r, som eventuelt kan settes inn i ligningen ovenfor, for å sjekke at det er samsvar mellom numerikken og den analytiske løsningen.
Fra og med $\phi = \phi_r$ har vi sluring. Lag programmet slik at ballens bevegelse beregnes inntil den mister kontakten med underlaget. Dette skjer ved vinkelen ϕ_k, bestemt ved at $N(\phi_k) = 0$.

Numerisk løsning av bevegelsesligningene

Bevegelsesligningene er differensialligninger, på formen $F = MA = M\,dV/dt$, slik at vi kan skrive

$$dV = \frac{F}{M}\,dt.$$

I numeriske beregninger kan vi selvsagt ikke ta uendelig små tidssteg dt, men vi kan ta et *lite* tidssteg Δt, som gir hastighetsendringen

$$\Delta V = \frac{F}{M}\,\Delta t.$$

Med andre ord, hvis vi kjenner $V(t)$, kan vi beregne $V(t + \Delta t)$ slik:

$$V(t + \Delta t) = V(t) + \frac{F(t)}{M}\,\Delta t = V(t) + A(t)\Delta t.$$

Her skulle egentlig likhetstegnene ha vært erstattet med $\simeq$, men med et tilstrekkelig lite tidssteg Δt blir feilen vi gjør også liten. Denne enkle numeriske metoden kalles *forward Euler*.
I et dataprogram er det hensiktsmessig å lage *tabeller* med verdier for de ulike størrelsene som skal beregnes. Vi lager også en tilsvarende tabell for variablene som de fysiske størrelsene avhenger av. I vårt tilfelle er det tiden t som er den aktuelle variabelen, og vi setter

$$t_1 = 0,\ t_2 = \Delta t,\ t_3 = 2\Delta t,\ \ldots\ ,\ t_{j+1} = j \cdot \Delta t.$$

Alle tidsavhengige fysiske størrelser i det aktuelle problemet puttes inn i tilsvarende tabeller, slik at $V_1 = V(t_1) = V(0)$, $V_{j+1} = V(t_{j+1}) = V(j\Delta t)$ osv. På denne måten vil element nr $j+1$ i alle tabellene representere de ulike fysiske størrelsene ved samme tidspunkt $t_{j+1} = j\Delta t$.
Her er noen størrelser som du vanskelig kan komme utenom i det aktuelle problemet:

$$\begin{aligned}
V_{j+1} &= V_j + A_j\Delta t \\
\Omega_j &= V_j/(r+R) \\
\phi_{j+1} &= \phi_j + \Omega_j\Delta t \\
f_j &= 2MA_j/3 \quad \text{rulling} \\
f_j &= \mu_k N_j \quad \text{sluring} \\
A_j &= 3g\sin(\phi_j)/5 \quad \text{rulling} \\
A_j &= g\sin(\phi_j) - f_j \quad \text{sluring} \\
N_j &= Mg\cos(\phi_j) - MV_j^2/(r+R) \\
f_{j,\max} &= \mu_s N_j
\end{aligned}$$

For å "komme i gang", må du tilordne startverdier for enkelte størrelser. Det kan for eksempel være $V_1 = V_0$ (hvis ballen starter med kjent starthastighet V_0) og $\phi_1 = \phi_0$ (hvis CM starter ved en kjent vinkel ϕ_0). Deretter kan Ω_1, A_1, f_1, N_1 osv beregnes med formlene ovenfor. Kjennskap til A_1 gir grunnlag for å bestemme V_2, og deretter Ω_2 og ϕ_2, og alle de andre størrelsene for $j = 2$. Og så videre!
For hvert trinn i en slik syklus må du sjekke (1) om det fortsatt er kontakt med underlaget (dvs om $N > 0$), og hvis ja, (2) om det er rulling eller sluring. Slike tester gjøres typisk med kommandoer som `while ... end` eller `if ... else ... end`.

Programmeringstips

Forslag til hvordan ulike deler av problemet kan løses med Matlab og Python kommer på blackboard (BB) etter hvert.
(Filene legges også ut på emnets åpne webside.)

Eksperimentelt

- Film: volleyball.mov
- Fil med tid t (s) og posisjon (x, y (cm)): volleyball.txt
- Bilder pr sekund: 30
- Radius, kvartsirkel: 79 cm
- Radius, volleyball: 10 cm
- Materiale, underlag: Metall
- Materiale, volleyball: Myk plast eller lær
- Startvinkel for ballens CM: $\phi_0 = 0.055$ rad
- Starthastighet for ballens CM: $V_0 = 0.040$ m/s

Oppgaver og rammebetingelser

- Jobb fortrinnsvis to og to sammen. Begge leverer da samme besvarelse hver for seg på BB, tydelig merket med begges navn og brukernavn. Lever Matlab eller Python programfil(er) samt figurer og tekst i pdf-format (se punktene nedenfor). Grupper på en, tre eller fire tillates også.
- Last ned filene volleyball.mov og volleyball.txt.
- Se på filmen og anslå på øyemål vinkelen ϕ_k, dvs der ballen mister kontakten med underlaget.
- Bruk Matlab eller Python til å løse bevegelsesligningene numerisk, fra ballen er på toppen ($\phi \simeq 0$) og fram til der ballen mister kontakten med underlaget ($\phi = \phi_k$).
- Les eksperimentelle data for tid og posisjon til ballens CM (t, x, y) inn i programmet ditt fra filen volleyball.txt. Sammenlign numerisk og eksperimentell ballbevegelse. Tilpass tallverdier for μ_k og μ_s slik at du får brukbart samsvar mellom teori (numerikk) og eksperiment. Bruk $g = 9.81$ m/s^2. Bruk tidssteg $\Delta t = 0.01$ s (eller mindre) i dine numeriske beregninger. (Men merk at det eksperimentelle tidssteget er 1/30 s.)
- Identifiser overgangen mellom ren rulling og sluring, dvs vinkelen ϕ_r. Sjekk om den numerisk identifiserte ϕ_r stemmer med ligningen for ϕ_r i teksten ovenfor.
- Identifiser hvor ballen mister kontakten med underlaget, dvs vinkelen ϕ_k. Sjekk om den numerisk beregnede ϕ_k stemmer med estimatet ditt basert på filmen.
- For å få øvingen godkjent må besvarelsen (minst) inneholde det som spesifiseres i punktene nedenfor.

- Figur 1: Eksperimentell og numerisk beregnet vinkel $\phi(t)$. Bruk enhetene grader og sekunder for ϕ og t.
- Figur 2: Eksperimentell og numerisk beregnet vinkelhastighet $\Omega(\phi)$. Bruk enhetene grader/s og grader for Ω og ϕ.
- Figur 3: Eksperimentell og numerisk beregnet vinkelakselerasjon $\alpha(\phi)$. Bruk enhetene grader/s^2 og grader for α og ϕ. (Merk: Her er $\alpha = d\Omega/dt$, dvs vinkelakselerasjonen for ballens CM.)
- Figur 4: Numerisk beregnet normalkraft pr masseenhet, $N(\phi)/M$. Bruk enhetene N/kg og grader.
- Figur 5: $R_{\mathrm{CM}}(\phi)$, dvs avstanden fra kvartsirkelens sentrum til ballens CM. Bruk enhetene cm og grader.
- Tekst: Angi tallverdier benyttet for μ_s og μ_k. Bruk figur 3 til å fastsette vinkelen ϕ_r, dvs overgangen fra ren rulling til sluring. Bruk figur 4 og 5 til å sammenligne numerisk og eksperimentelt bestemt vinkel ϕ_k, dvs overgangen til fritt fall. Diskuter i gruppen og anslå usikkerheten i eksperimentelle og numeriske resultater.

Frivillige ekstraoppgaver:
Plott relativhastigheten i kontaktpunktet mellom ball og underlag.
Plott friksjonskraften pr masseenhet.
Plott effekttapet pr masseenhet pga kinetisk friksjon.
(Alle størrelser som funksjon av vinkelen ϕ.)