Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektromagnetisme
Vår 2009

Løsningsforslag til øving 11

Oppgave 1

Kirchhoffs spenningsregel (K2) gir

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{C} = RI_R$$

mens Kirchhoffs strømregel (K1) gir

$$I = I_C + I_R$$

Dessuten har vi

$$I_C = \frac{dQ}{dt}$$

Dermed:

$$\begin{aligned} I_R(t) &= \frac{V_0}{R}\cos\omega t \\ Q(t) &= V_0 C\cos\omega t \\ I_C(t) &= -\omega C V_0 \sin\omega t = \omega C V_0 \cos(\omega t + \pi/2) \end{aligned}$$

Total strøm levert av spenningskilden blir dermed

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\cos\omega t - \omega C V_0 \sin\omega t$$

Vi ønsker å ha $I(t)$ på formen

$$I(t) = I_0\cos(\omega t - \alpha)$$

med amplitude $I_0 = V_0/Z$, der Z er impedansen til parallellkoblingen av R og C, mens α blir fasevinkelen, dvs faseforskyvningen mellom $\mathcal{E}(t)$ og $I(t)$. Vi har

$$\cos(\omega t - \alpha) = \cos\omega t\cos\alpha + \sin\omega t\sin\alpha$$

Dermed, ved direkte sammenligning:

$$\begin{aligned} \frac{\cos\alpha}{Z} &= \frac{1}{R} \\ \frac{\sin\alpha}{Z} &= -\omega C \end{aligned}$$

Disse to ligningene, med to ukjente Z og α, løses greit, og vi finner

$$\begin{aligned} Z &= \frac{R}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \\ I_0 &= \frac{V_0}{R}\sqrt{1+(\omega RC)^2} \\ \alpha &= -\arctan(\omega RC) \end{aligned}$$

I grensen $\omega \to 0$ bør vi gjenfinne "velkjente" resultater fra likespenningseksemplene i forelesningene, og det gjør vi: $Z \to R$ og $\alpha \to 0$ slik at $I_0 \to V_0/R$. All strøm går gjennom motstanden R, mens kapasitansen C nå representerer en åpen krets der det ikke går noen likestrøm.

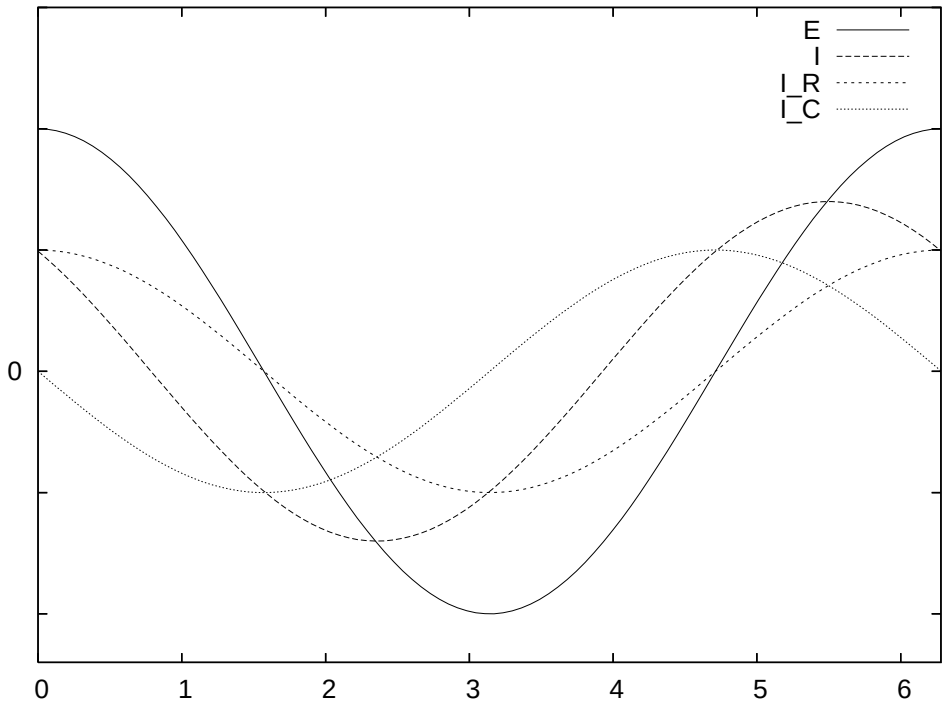
Med de oppgitte tallverdiene har vi

$$\omega RC = 2\pi \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 10^{-9} = 1.0$$

slik at

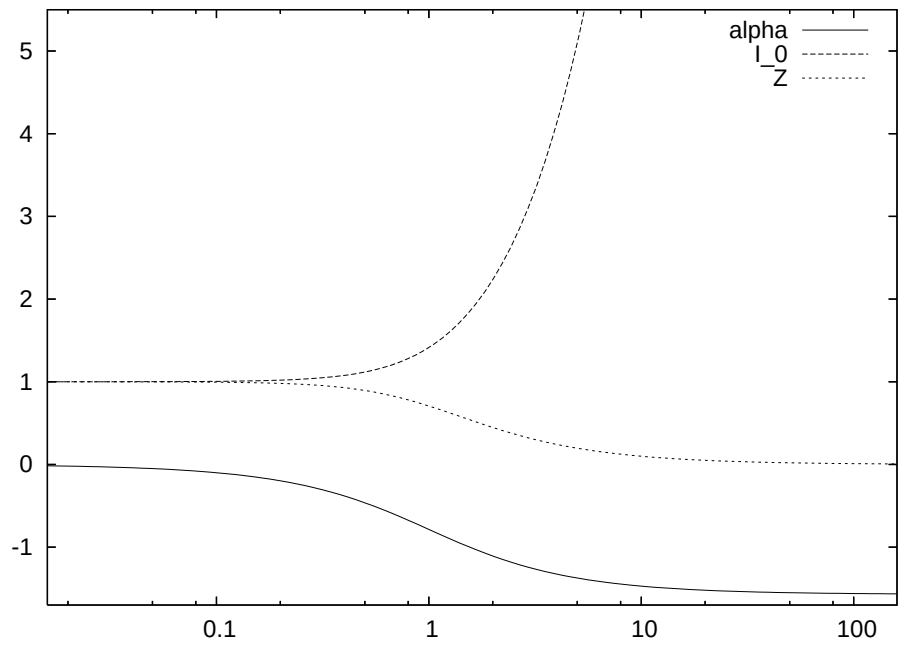
$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1.0}{10} \cdot \sqrt{2} = 0.14 \text{ A} \\ \alpha &= -\arctan 1.0 = -45^\circ \end{aligned}$$

Skisse av $\mathcal{E}(t)$, $I(t)$, $I_R(t)$ og $I_C(t)$:



Legg merke til at I_R svinger i fase med $\mathcal{E}$, mens I_C er faseforskjøvet $\pi/2$ i forhold til $\mathcal{E}$. Faseforskyvningen mellom $\mathcal{E}$ og total strøm $I = I_R + I_C$ blir med de aktuelle tallverdiene liggende midt mellom, dvs 45 grader.

Skisse av α, I_0 og Z (med α i radianer og ωRC mellom 0.016 og 160 langs horisontal akse):



Legg merke til at faseforskyvningen α mellom påtrykt spenning $\mathcal{E}$ og total strøm I er omtrent lik null for lave frekvenser. Da går det meste av strømmen gjennom motstanden ($I \simeq I_R$), og kretsen oppfører seg omtrent som den ville ha gjort uten kapasitansen til stede. For høye frekvenser blir α omtrent lik -90 grader. Da går det meste av strømmen i "grenen" med kondensatoren ($I \simeq I_C$), og kretsen oppfører seg omtrent som den ville ha gjort uten motstanden til stede.
For lave frekvenser blir dermed strømamplituden I_0 omtrent konstant, dvs uavhengig av frekvensen, mens for høye frekvenser øker I_0 proporsjonalt med frekvensen.
Vi ser at overgangen mellom "lave" og "høye" frekvenser skjer der $\omega \simeq 1/RC = 1/\tau$, der τ er tidskonstanten for en slik RC-krets.

Oppgave 2

I det første eksperimentet er $B = 0$. Da er Newtons 2. lov

$$\boldsymbol{F} \;=\; m\boldsymbol{a} = q\boldsymbol{E}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \frac{q}{m}\boldsymbol{E} \\
\Rightarrow \boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{v}(0) + \frac{q}{m}\boldsymbol{E}t = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \\
\Rightarrow \boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}(0) + \boldsymbol{v}(0)t + \frac{q}{2m}\boldsymbol{E}t^2
\end{aligned}
$$

Her er det naturlig å velge $t = 0$ idet partikkelen entrer området med $E \neq 0$, og dessuten velge origo i denne posisjonen:

$$\boldsymbol{r}(0) = (x_0, y_0) = (0, 0)$$

Her er hastigheten

$$\boldsymbol{v}(0) = v\ \hat{x}$$

når vi legger x-aksen mot høyre. y-aksen legger vi oppover, slik at

$$\boldsymbol{E} = -E\ \hat{y}$$

(dvs med $E > 0$) Partikkelbanen inne i feltet blir altså en parabel, akkurat som når vi kaster en masse i tyngdefeltet. Hastigheten i x-retning påvirkes ikke slik at

$$x(t) = vt$$

mens partikkelen får en konstant akselerasjon i y-retning, dvs forflytningen i y-retning som funksjon av t må være bestemt ved

$$y(t) = -\frac{q}{2m}Et^2$$

Partikkelen vil forlate området der $E \neq 0$ ved tidspunktet

$$t_L = \frac{x(t_L)}{v} = \frac{L}{v}$$

Vertikalposisjonen er da

$$y(t_L) = -\frac{q}{2m}E\frac{L^2}{v^2}$$

Allerede nå kan vi konkludere med at $q < 0$ dersom $y(t_L) > 0$.
Distansen fra $x = L$ til $x = L + D$ tilbakelegges deretter uten påvirkning av noen krefter, med retning i forhold til x-aksen gitt ved vinkelen α, der

$$\tan\alpha = \frac{v_y(t_L)}{v_x(t_L)} = \frac{-(q/m)E(L/v)}{v} = -\frac{qEL}{mv^2}$$

Vi må dessuten ha

$$\tan\alpha = \frac{y - y(t_L)}{D}$$

der y er treffpunktet på detektoren, ved $x = L + D$.

Eksperimentet gjentas nå med samme E-felt, men vi skrur nå på et magnetfelt B med retning inn i planet inntil partiklene ikke avbøyes av feltene. Det må bety at den elektriske krafta (oppover) akkurat balanseres av en magnetisk kraft (nedover). Altså:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = 0 \\ \Rightarrow E &= vB \\ \Rightarrow \frac{1}{v} &= \frac{B}{E} \end{aligned}$$

Dermed:

$$\begin{aligned} \frac{y - y(t_L)}{D} &= -\frac{qEL}{mv^2} = -\frac{qEL}{m} \cdot \frac{B^2}{E^2} \\ \Rightarrow y + \frac{q}{2m} EL^2 \frac{B^2}{E^2} &= -\frac{qEL}{m} \cdot \frac{B^2}{E^2} D \\ \Rightarrow yE &= -\frac{q}{m} \cdot B^2 \left(DL + \frac{1}{2} L^2 \right) \\ \Rightarrow \frac{q}{m} &= -\frac{yE}{B^2 \left(DL + \frac{1}{2} L^2 \right)} \end{aligned}$$

Dvs,

$$a = \frac{E}{B^2 \left(DL + L^2/2 \right)}$$

Oppgave 3

a) Ionenes hastighet når de kommer inn i magnetfeltet er gitt ved at endringen i potensiell energi gjennom spenningsforskjellen V tilsvarer endringen i ionenes kinetiske energi:

$$eV = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

Sentripetalakselerasjonen inne i magnetfeltet er

$$a = \frac{v^2}{r}$$

slik at Newtons 2. lov gir

$$F = m\frac{v^2}{r} = evB \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv}{eB}$$

Baneradius for en partikkel med masse m blir

$$r = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Vm}{e}}$$

altså proporsjonal med $\sqrt{m}$. Baneradier og masser for de ulike isotopene må altså forholde seg til hverandre på følgende vis:

$$\frac{r_i}{r_j} = \sqrt{\frac{m_i}{m_j}}$$

der $i, j = 79$ eller 81.
Dersom ionenes treffpunkt på den fotografiske platen skal være adskilt med (minst) en avstand $a = 1.0$ cm, må forskjellen i banenes *diameter* være 1.0 cm. Vi får:

$$a = 1.0 \text{ cm } = 2(r_{81} - r_{79}) = 2r_{79}\left(\sqrt{\frac{m_{81}}{m_{79}}} - 1\right)$$

Det gir

$$r_{79} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{m_{81}}{m_{79}}} - 1\right)^{-1} = 0.5 \text{ cm } \cdot \left(\sqrt{\frac{81}{79}} - 1\right)^{-1} \simeq 39.7 \text{ cm}$$

og

$$r_{81} = r_{79} + \frac{a}{2} \simeq 40.2 \text{ cm}$$

Vi kan nå bestemme hvor sterkt magnetfelt som kan brukes for å få disse baneradiene:

$$B = \frac{1}{r_{81}}\sqrt{\frac{2Vm_{81}}{e}} = \frac{1}{0.402} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \cdot 81 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{1.6 \cdot 10^{-19}}} = 0.065 \text{ T}$$

Dette representerer øvre grense for B: Et sterkere magnetfelt vil redusere både r_{79} og r_{81}, men r_{81} mest, slik at treffpunktene kommer nærmere hverandre. Samtidig skal ikke $d_{81} = 2r_{81}$ overstige instrumentets fysiske begrensning gitt ved $L = 250$ cm. Det tilsvarer en minsteverdi på magnetfeltstyrken:

$$B_{\min} = \frac{1}{L/2}\sqrt{\frac{2Vm_{81}}{e}} = \frac{1}{1.25} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \cdot 81 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{1.6 \cdot 10^{-19}}} = 0.021 \text{ T}$$

Vi kan med andre ord benytte et magnetfelt i området 21 til 65 mT.

Oppgave 4

a) Argumentasjonen her tilsvarer den vi brukte da vi skulle beregne det elektriske feltet på symmetriaksen til en jevnt ladet ring. Da så vi på bidragene til feltet fra diametralt motsatte ladningselementer dq og overbeviste oss om at det totale elektriske feltet måtte peke langs symmetriaksen.
Her kan vi f.eks. se på de to lederelementene som ligger akkurat på positiv og negativ y-akse og bestemme retningen på bidraget til magnetfeltet på z-aksen fra disse. Vi tar for oss positive z først. (Se figuren på neste side. Her angir indeks + avstand fra og feltbidrag fra strømelementet som krysser positiv z-akse, mens indeks - angir tilsvarende fra strømelementet som krysser negativ z-akse.) "Strømelementet" $I\, d\boldsymbol{l}$ som krysser positiv y-akse har retning langs negativ x-akse. Kryssproduktet av denne vektoren med $\boldsymbol{r}_+$ fra strømelementet til den aktuelle posisjonen på positiv z-akse blir en vektor som ligger i yz-planet, med positiv y- og z-komponent. Det diametralt motsatte strømelementet som krysser den negative y-aksen har retning langs positiv x-akse. Kryssproduktet av denne vektoren med $\boldsymbol{r}_-$ fra strømelementet til den aktuelle posisjonen på positiv z-akse blir en vektor som også ligger i yz-planet, men denne vil ha *negativ* y-komponent og positiv z-komponent. Av symmetrigrunner må disse bidragene

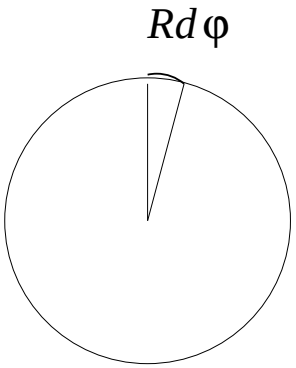
til $\boldsymbol{B}$ være like store i absoluttverdi, ha like store z-komponenter med samme fortegn, og ha like store y-komponenter med *motsatt* fortegn. Summen av de to bidragene peker med andre ord langs (positiv) z-akse.
Tilsvarende argumentasjon kan vi benytte for par av diametralt motsatte strømelementer rundt hele den strømførende ringen. De vil alle ha like stor z-komponent med samme fortegn og like store x- og y-komponenter med motsatt fortegn.
Konklusjon: $\boldsymbol{B}$ på positiv z-akse har retning langs z-aksen.

b) I forrige punkt overbeviste vi oss om at $\boldsymbol{B}(z)$ har retning langs positiv z-akse når $z > 0$. Hva hvis $z < 0$?
En figurbetraktning tilsvarende den vi gjorde under punkt *a*) viser at strømelementet som krysser den positive y-aksen gir et bidrag til $\boldsymbol{B}(z)$ på negativ z-akse som ligger i yz-planet med positiv z-komponent og negativ y-komponent. For strømelementet som krysser den negative y-aksen finner vi et bidrag med positiv z-komponent og positiv y-komponent. Alt i alt et magnetfelt med retning langs positiv z-akse.
Konklusjon: Magnetfeltet peker langs positiv z-akse på hele z-aksen.

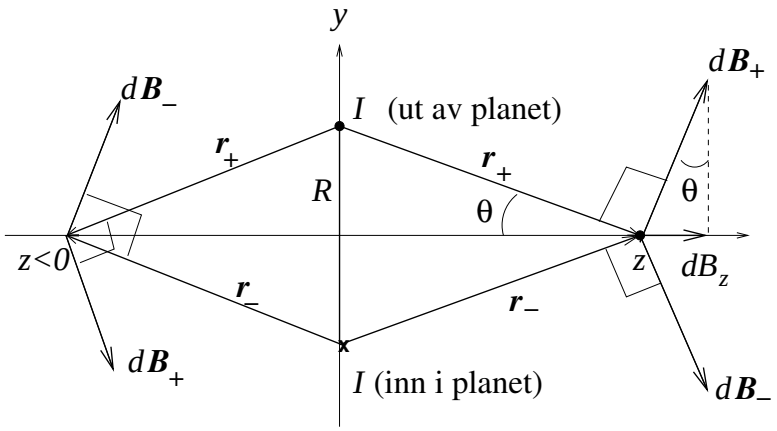
c) Vektorene $I\ d\boldsymbol{l}$ og $\hat{r}$ står vinkelrett på hverandre. Dermed er

$$|I\ d\boldsymbol{l} \times \hat{r}| = IR\ d\phi \cdot 1$$

ettersom et kurveelement dl langs en sirkel er lik radien R multiplisert med vinkelelementet $d\phi$:



Retningen på $d\boldsymbol{B}$ må bli som vist i figuren:



Fra figuren ser vi at

$$\frac{dB_z}{dB} = \sin\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

og det er jo nettopp z-komponenten av magnetfeltet vi her er ute etter. Absoluttverdien til $d\boldsymbol{B}$ blir

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{IR\,d\phi}{z^2+R^2}$$

slik at

$$dB_z = dB\sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{IR\,d\phi}{z^2+R^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{\mu_0 IR^2\,d\phi}{4\pi\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

Den totale z-komponenten, og dermed det totale magnetfeltet, får vi deretter ved å integrere opp bidragene fra alle strømelementene i hele ringen, dvs ved å integrere dette uttrykket over vinkelen ϕ fra 0 til 2π:

$$B(z) = \int dB_z = \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 IR^2}{2\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

som skulle vises.

d) I stor avstand fra strømsløyfa kan vi sette

$$z^2+R^2 \simeq z^2$$

Dermed blir magnetfeltet tilnærmet lik

$$B(z) \simeq \frac{\mu_0 IR^2}{2z^3}$$

Strømsløyfas magnetiske dipolmoment er

$$m = IA = I\cdot\pi R^2$$

så vi kan skrive dette magnetfeltet på formen

$$B(z) = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}$$

Det er vel verdt å sammenligne dette resultatet med det elektriske feltet på aksen til en elektrisk dipol, i stor avstand z fra dipolen. Dette gjorde vi i øving 4, hvor vi fant

$$E(z) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 z^3}$$

der p er dipolens elektriske dipolmoment. Altså nøyaktig samme resultat, med m istedetfor p og μ_0 istedetfor $1/\varepsilon_0$.
Vi skal finne flere analogier mellom elektrostatikken og magnetostatikken etterhvert!