Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektromagnetisme
Vår 2009

Løsningsforslag til øving 13

Oppgave 1

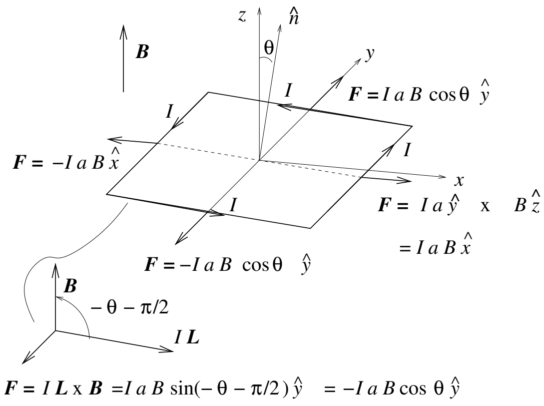
a) Sløyfas magnetiske dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = IA\,\hat{n} = Ia^2\,\hat{n}$$

Sløyfa består av 4 rette ledere med lengde a, der to og to har strømmen gående i motsatt retning. Dermed blir den magnetiske kraften

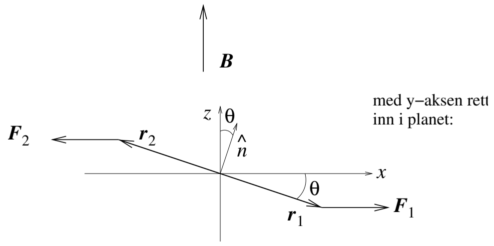
$$\boldsymbol{F} = I\int d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} = I\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}$$

motsatt rettet, men like stor i absoluttverdi, for slike par av rette lederbiter. Den totale kraften på sløyfa blir dermed null. Noen detaljer er inkludert i figuren:



Vi ser av figuren at kreftene fra magnetfeltet ville ha deformert strømsløyfa dersom det hadde vært en mulighet. For ei makroskopisk strømsløyfe er dette som regel en neglisjerbar effekt, men dersom strømsløyfa er en klassisk modell av et elektron i bane rundt en atomkjerne, aner vi at *i tillegg* til en innretting av strømsløyfa (som vi skal se på i resten av denne oppgaven), vil magnetfeltet påvirke selve banebevegelsen til elektronet rundt kjernen. Med andre ord: Atomets magnetiske moment endres både i *retning* og i *absoluttverdi*. Førstnevnte effekt er *paramagnetisme*, sistnevnte effekt er *diamagnetisme*. En klassisk modell av diamagnetisme så vi på i forrige øving. Her konsentrerer vi oss om orienteringen av $\boldsymbol{m}$.

b) Av figuren over ser vi at de to strømmene som går parallelt med xz-planet påvirkes av krefter i hhv positiv og negativ y-retning. Disse kreftene vil da ikke bidra til dreiemomentet omkring y-aksen.
Kreftene som virker på strømmene som går parallelt med y-aksen gir tilsammen et dreiemoment (se figuren nedenfor og ovenfor)



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= \sum \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \\
&= -r_1 F_1 \sin\theta \, \hat{y} - r_2 F_2 \sin\theta \, \hat{y} \\
&= -2 \cdot \frac{a}{2} \cdot IaB \sin\theta \, \hat{y} \\
&= -Ia^2 \cdot B \sin\theta \, \hat{y} \\
&= -m \cdot B \sin\theta \, \hat{y} \\
&= \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

Skiftet av fortegn i siste linje skyldes av vi hadde valgt positiv vinkel θ mellom z-aksen og $\hat{n}$, altså mellom $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{m}$. Kryssproduktet $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$ er, pr definisjon, m ganger B ganger sinus til vinkelen mellom $\boldsymbol{m}$ og $\boldsymbol{B}$, dvs $mB\sin(-\theta) = -mB\sin\theta$.

c) I oppgave 4c i øving 5 hadde vi en *generell* sammenheng mellom dreiemoment τ og tilhørende potensiell energi U, nemlig at en rotasjon gjennom en vinkel $d\alpha$ under påvirkning av et dreiemoment τ resulterer i en endring dU i potensiell energi gitt ved

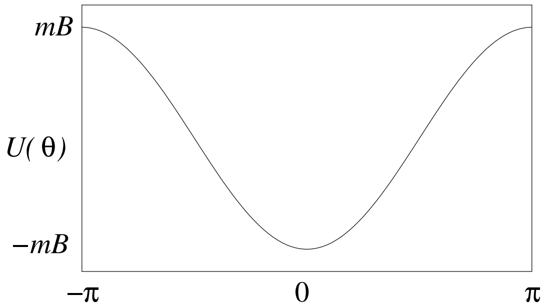
$$dU = -\tau \, d\alpha$$

Denne sammenhengen er ikke avhengig av hvilken *type* krefter og dreiemoment det handler om, og må derfor gjelde like bra for vår magnetiske dipol i et magnetfelt som for den elektriske dipolen i et elektrisk felt i øving 5. Følgelig:

$$
\begin{aligned}
U(\theta) &= \int_{\theta_0}^{\theta} dU \\
&= -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau(\alpha) \, d\alpha \\
&= mB \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\alpha \, d\alpha \\
&= mB\,(\cos\theta_0 - \cos\theta) \\
&= -mB\cos\theta \\
&= -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

Her valgte jeg å sette $U(0) = -mB$, dvs $\theta_0 = \pi/2$.

Skisse:



Vi har minimal U, og følgelig stabil likevekt for $\theta = 0$, dvs for dipolen orientert slik at $\boldsymbol{m}$ er parallell med $\boldsymbol{B}$. Vi har maksimal U, og følgelig ustabil likevekt for $\theta = \pm\pi$, dvs for dipolen orientert slik at $\boldsymbol{m}$ er parallell med $-\boldsymbol{B}$.
Dette er magnetismens analogi til polarisering av dielektriske medier i et ytre elektrisk felt: Magnetiske dipoler retter seg inn langs det påtrykte magnetfeltet. Som nevnt lenger opp, dette er hva vi kaller *paramagnetisme*. Vi har snakket om ulike typer magnetisme i forelesningene – la dette være en liten oppsummering av det:
Medier som består av atomer som har et atomært magnetisk dipolmoment som *ikke* er lik null, og der dipolmomentene på atomer i nærheten av hverandre *ikke* vekselvirker med hverandre, er *paramagneter*. *Uten* et ytre magnetfelt vil de atomære magnetiske dipolmomentene peke i tilfeldige retninger, slik at den midlere *magnetiseringen*, dvs midlere magnetiske dipolmoment pr volumenhet (se punkt *d*)), blir lik null overalt i mediet. Slik var det også med midlere polarisering i et dielektrikum når vi ikke hadde noe ytre elektrisk felt. *Med* et ytre magnetfelt får vi en tendens til innretting av magnetiske dipolmoment langs det ytre feltet, og dermed en midlere magnetisering forskjellig fra null. Eksempler på paramagnetiske materialer er aluminium (Al) og magnesium (Mg).
Medier som består av atomer med atomært magnetisk dipolmoment *lik null* har ingenting å rette inn i et påtrykt magnetfelt. Men, og som nevnt lenger opp, *banebevegelsen* til elektronene rundt atomkjernen vil påvirkes av et ytre magnetfelt, slik at vi får *indusert* et atomært magnetisk dipolmoment i hvert eneste atom. Slike medier er *diamagneter*. Vi så kvalitativt på denne effekten i forrige øving og fant at det induserte magnetiske dipolmomentet ble *motsatt rettet det ytre feltet*. Diamagnetisme er en mye svakere effekt enn paramagnetisme. Også i paramagneter, der vi *har* permanente atomære magnetiske dipolmoment, får vi en slik diamagnetisk "respons" i et ytre magnetfelt. Den diamagnetiske responsen vil imidlertid være tilnærmet neglisjerbar i en paramagnet. For å kunne måle diamagnetisme, trenger vi derfor medier med null atomært magnetisk dipolmoment i utgangspunktet (dvs før vi skrur på det ytre magnetfeltet). Eksempler på diamagneter er gull (Au), sølv (Ag), kobber (Cu).
I enkelte medier har vi atomer med magnetiske dipolmoment som *vekselvirker* med dipolmomentene på naboatomene. F.eks. kan vekselvirkningen være slik at det er energetisk foretrukket at naboatomer har sine magnetiske dipolmoment i samme retning. Da har vi en *ferromagnet*, og eksempler på ferromagneter er jern (Fe), kobolt (Co) og nikkel (Ni).

d) Maksimal magnetisering i jern blir lik antall jernatomer pr volumenhet ganget med magnetisk dipolmoment pr jernatom:

$$M = \frac{m}{V} = 2\mu_B \cdot \frac{7.9 \cdot 10^6}{55.9} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 2 \cdot 9.27 \cdot 10^{-24} \cdot \frac{7.9 \cdot 10^6}{55.9} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 1.6 \cdot 10^6$$

Enheten til m er Am^2, enheten til V er m^3. Følgelig blir enheten til magnetisering A/m.

Oppgave 2

Fra hysteresekurven har vi at $B(H=0) = \pm 1.0$ T og $H(B=0) = \mp 3.4$ A/mm $= \mp 3400$ A/m. Videre ser vi at $B(H \to \pm\infty) = \pm 1.5$ T. Her gjelder øvre fortegn for den øverste kurven (dvs minkende H).
Starter med å bestemme H_0:

$$B(3.4) = 0 = B_0 \arctan 0$$

$$\Rightarrow H_0 = 3.4 \text{ A/mm}$$

Deretter B_0:

$$B(\infty) = 1.5 \text{ T} = B_0 \arctan(\infty) = B_0 \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow B_0 = \frac{3.0}{\pi} \text{ T} \simeq 0.95 \text{ T}$$

Til slutt α:

$$B(0) = 1.0 \text{ T} = B_0 \arctan(\alpha)$$

$$\Rightarrow \arctan(\alpha) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \simeq 1.73$$

For å bestemme w finner vi først $H(B)$:

$$\begin{aligned}
B(H) &= B_0 \arctan\left(\alpha \frac{H \mp H_0}{H_0}\right) \\
\Rightarrow \alpha \frac{H \mp H_0}{H_0} &= \tan\left(\frac{B}{B_0}\right) \\
\Rightarrow H \mp H_0 &= \frac{H_0}{\alpha} \tan\left(\frac{B}{B_0}\right) \\
\Rightarrow H_\pm(B) &= \pm H_0 + \frac{H_0}{\alpha} \tan\left(\frac{B}{B_0}\right)
\end{aligned}$$

Her gjelder øvre fortegn kurven som tilsvarer økende verdi av H. Energien w som tapes i jernsylinderen pr volumenhet og pr periode er gitt ved integralet av $H(B)$ en runde rundt hysteresekurven. Integrasjonsgrensene er ± 1.5 T, dvs $\pm B_0\pi/2$.

$$\begin{aligned}
w &= \oint H(B)\, dB \\
&= \int_{-B_0\pi/2}^{B_0\pi/2} H_+ \, dB + \int_{B_0\pi/2}^{-B_0\pi/2} H_- \, dB
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-B_0\pi/2}^{B_0\pi/2} H_+ \, dB - \int_{-B_0\pi/2}^{B_0\pi/2} H_- \, dB \\
&= \int_{-B_0\pi/2}^{B_0\pi/2} (H_+ - H_-) dB \\
&= 2H_0 \int_{-B_0\pi/2}^{B_0\pi/2} dB \\
&= 2H_0 B_0 \pi
\end{aligned}
$$

Innsetting av tallverdier gir

$$w = 2 \cdot 3400 \cdot \frac{3}{\pi} \cdot \pi = 20400$$

dvs i enheten J/m^3.

Oppgave 3

Vi ser først på B_n, dvs komponenten av $\boldsymbol{B}$ som står normalt på det strømførende planet. Som gaussflate velger vi en fyrstikkeske, "symmetrisk omsluttende" et areal L^2 av det strømførende planet og med "høyde" h. Dvs, de to flatene som ligger parallelt med planet ligger på hver sin side i avstand $h/2$ fra planet. Når vi lar denne høyden h gå mot null, får vi ingen magnetisk fluks gjennom de fire sideflatene av gaussesken som står normalt på planet. Magnetfeltet like på oversiden er $\boldsymbol{B}$, så magnetisk fluks gjennom "topplokket" av esken blir $B_n \cdot L^2$. Vi lar altså L også være liten, men dog endelig. Dermed er magnetfeltet konstant over hele topplokket. På undersiden av flaten er magnetfeltet $\boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B}$. Dersom fluksen gjennom topplokket er positiv (dvs ut av gaussesken), må $\boldsymbol{B}$ på undersiden gi et like stort negativt bidrag, $-B_n \cdot L^2$. I tillegg får vi et positivt eller negativt bidrag $\Delta B_n \cdot L^2$ fra normalkomponenten ΔB_n til $\Delta\boldsymbol{B}$. Ifølge Gauss' lov skal netto fluks gjennom den lukkede flaten forsvinne. Dermed:

$$B_n \cdot L^2 - B_n \cdot L^2 + \Delta B_n \cdot L^2 = 0$$

Med andre ord: Normalkomponenten til $\Delta\boldsymbol{B}$ må være lik null. Dvs, normalkomponenten til $\boldsymbol{B}$ er kontinuerlig.

Deretter bruker vi Amperes lov på den nederste av de to amperekurvene i figuren i oppgaveteksten, nemlig den som omslutter et rektangel med flatenormal tangentielt til planet, men normalt til strømretningen. Vi lar lengden normalt til planet være h, som vi lar gå mot null, mens lengden L parallelt med planet lar vi være liten men endelig. Da får vi null bidrag til kurveintegralet i Amperes lov fra de to sidekantene med lengde h. Fra biten med lengde L på oversiden av flaten får vi bidraget $B_{t\|} \cdot L$, der $B_{t\|}$ er komponenten av $\boldsymbol{B}$ som er parallell til både planet og til strømretningen. (Som over antar vi L så liten at $\boldsymbol{B}$ er konstant over hele lengden L.) Fra biten med lengde L på undersiden av flaten får vi bidraget $-B_{t\|} \cdot L$ fra $\boldsymbol{B}$ (motsatt fortegn av bidraget på oversiden fordi vi går motsatt vei) og dessuten bidraget $\Delta B_{t\|} \cdot L$ fra $\Delta\boldsymbol{B}$. Tilsammen skal kurveintegralet rundt den lukkede kurven, dvs rektangelet, være lik μ_0 ganget med strømmen som kurven omslutter. Her er omsluttet strøm lik null, så vi får

$$B_{t\|} \cdot L - B_{t\|} \cdot L + \Delta B_{t\|} \cdot L = 0$$

Med andre ord: Komponenten av $\Delta\boldsymbol{B}$ som er parallell til både planet og til strømretningen må være lik null. Dvs, $B_{t\parallel}$ er kontinuerlig.

Endelig bruker vi Amperes lov på den øverste av de to amperekurvene i figuren i oppgaveteksten, nemlig den som omslutter et rektangel med flatenormal tangentielt til planet *og* til strømretningen. Nok en gang lar vi høyden h gå mot null slik at vi ikke får noe bidrag til kurveintegralet fra de to bitene normalt til planet. Bidraget fra lengden L over planet blir nå $B_{t\perp} \cdot L$, der $B_{t\perp}$ er komponenten av $\boldsymbol{B}$ tangentielt til planet og normalt til strømretningen. Hvis bidraget er positivt når vi integrerer som vist i figuren, dvs mot klokka, betyr det at $B_{t\perp}$ er positiv mot venstre i figuren. Bidraget fra lengden L under planet blir dermed $-B_{t\perp} \cdot L$ fra $\boldsymbol{B}$ (for her går vi motsatt vei) og $\Delta B_{t\perp} \cdot L$ fra $\Delta\boldsymbol{B}$. Her må vi passe på fortegnet: Vi integrerer fra venstre mot høyre, så hvis dette siste bidraget er positivt, betyr det at $\Delta\boldsymbol{B}$ peker mot høyre. Omsluttet strøm i dette tilfellet er ikke lik null. Pr lengdeenhet har vi en strøm i i det strømførende planet. På en lengde L har vi derfor en strøm iL. Amperes lov gir da:

$$B_{t\perp} \cdot L - B_{t\perp} \cdot L + \Delta B_{t\perp} \cdot L = \mu_0 i L$$

dvs

$$\Delta B_{t\perp} = \mu_0 i$$

Og dette er altså hele diskontinuiteten i magnetfeltet når vi krysser det strømførende planet. Vi har valgt omløpsretning for kurveintegralet i Amperes lov konsistent med positiv strøm ut av planet. Med andre ord, diskontinuiteten $\Delta\boldsymbol{B}$ blir en vektor mot høyre, som vist i figuren, med absoluttverdi $\mu_0 i$. Vi ser at med flatenormalen $\hat{n}$ pekende nedover og strømmen $\boldsymbol{i}$ ut av planet, får vi riktig retning på $\Delta\boldsymbol{B}$ ved å skrive

$$\Delta\boldsymbol{B} = \mu_0\, \boldsymbol{i} \times \hat{n}$$

som oppgitt i oppgaveteksten.

Legg merke til at hele diskontinuiteten $\Delta\boldsymbol{B}$ dannes av den strømmen som går i planet akkurat der vi krysser planet, eller om du vil, der vi krysser planet og et lite område omkring. Resten av verden, inklusive hele det strømførende planet, *unntatt* den lille biten omkring krysningspunktet, skaper et magnetfelt som er kontinuerlig gjennom krysningspunktet. Dette er fullstendig analogt i elektrostatikken: Der fant vi at det elektriske feltet var diskontinuerlig når vi krysset en flate med netto ladning σ pr flateenhet. Også der kan vi tenke oss at vi ser på en liten bit (skive) av flaten omkring krysningspunktet og lar det totale feltet være feltet fra denne biten pluss feltet fra resten av verden, inklusive resten av den ladete flaten. Diskontinuiteten i det elektriske feltet skyldes da nettopp den lille ladete skiva omkring krysningspunktet, mens feltet fra resten av verden er kontinuerlig idet vi krysser flaten. Husk imidlertid den lille men viktige forskjellen, nemlig at det er *normalkomponenten* til det elektriske feltet som er diskontinuerlig, mens det er *tangentialkomponenten* (og mer presist, den som står vinkelrett på strømretningen) til det magnetiske feltet som er diskontinuerlig.