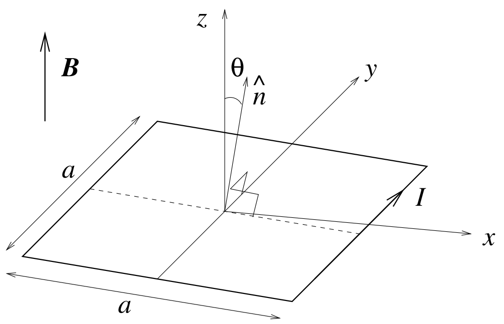
Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003: Elektromagnetisme
Vår 2009

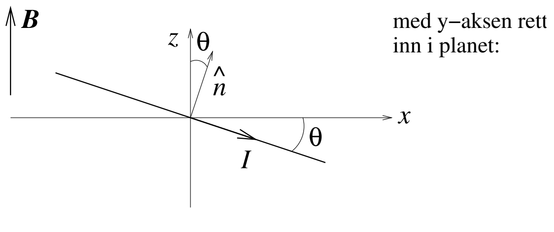
Øving 13

Veiledning: Mandag 20. og fredag 24. april
Innleveringsfrist: Fredag 24. april

Oppgave 1

I forelesningene viste vi at atomer kan oppfattes som små strømsløyfer, dvs som små magnetiske dipoler med magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$ der strømmen I går i en bane som omslutter et (plant) areal A. ("Vektorarealet" er da $\boldsymbol{A} = A\,\hat{n}$, der $\hat{n}$ er en enhetsvektor normalt til den omsluttede flaten, med positiv retning bestemt ved høyrehåndsregelen.)
Her skal vi bruke ei *kvadratisk* strømsløyfe som modell for en slik atomær magnetisk dipol og se nærmere på hvordan den vil oppføre seg i et magnetfelt $\boldsymbol{B}$. (Vi kunne også ha brukt ei *sirkulær* strømsløyfe, men den kvadratiske er litt enklere å regne på.)
Strømsløyfa har sidekanter med lengde a og fører altså en strøm I. Den er plassert i et *homogent* magnetfelt $\boldsymbol{B} = B\,\hat{z}$ og kan rotere fritt omkring y-aksen, som her går gjennom strømsløyfas sentrum som vist i figuren:





Orienteringen av strømsløyfa er definert ved vinkelen θ mellom z-aksen og flatenormalen $\hat{n}$. (Positiv θ *med* klokka, som vist i figuren.)

a) Hva blir strømsløyfas magnetiske dipolmoment $\boldsymbol{m}$? Hva blir den totale kraften fra $\boldsymbol{B}$ på strømsløyfa?

b) Beregn dreiemomentet $\boldsymbol{\tau}$ på sløyfa omkring y-aksen og vis at det kan uttrykkes på formen $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$.

[Tips: Finn kraften på hver av de fire rette lederstykkene og bruk at dreiemoment = "arm ganger kraft".]

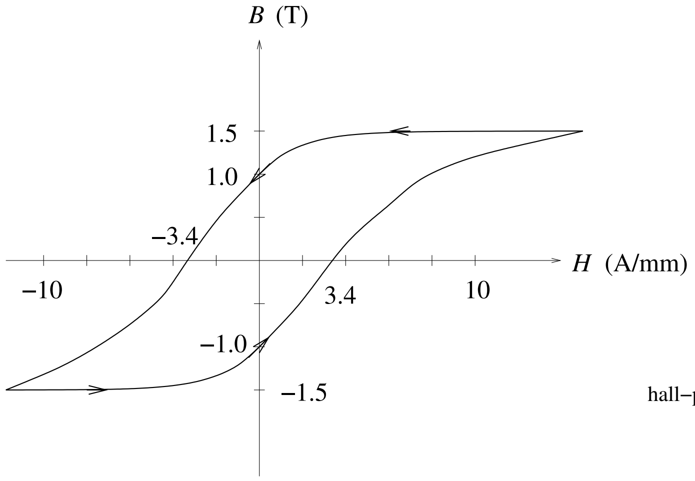
c) Bestem den potensielle energien $U(\theta)$ til en slik magnetisk dipol i feltet $\boldsymbol{B}$. Skisser $U(\theta)$. Hva slags orientering av dipolen i forhold til $\boldsymbol{B}$ representerer henholdsvis en stabil og en ustabil likevekt? [Tips: $\tau = -dU/d\theta$, jfr øving 5.]

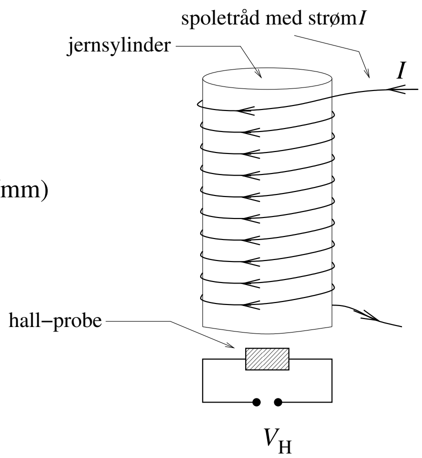
d) I jern har hvert atom et magnetisk dipolmoment $\boldsymbol{m}_{\mathrm{Fe}}$ som dannes av to parallelle elektronspinn, slik at $m_{\mathrm{Fe}} = 2\mu_B$. Her er $\mu_B = e\hbar/2m_e$ det magnetiske dipolmomentet for ett elektronspinn, det såkalte Bohr-magnetonet, med verdi $9.27 \cdot 10^{-24}$ Am^2.
Hva blir da den maksimale magnetiseringen M i jern (dvs: magnetisk dipolmoment pr volumenhet)?

Oppgitt: Molar masse, jern: 55.9 g/mol. Massetetthet, jern: 7.9 g/cm^3. 1 mol = $6.02 \cdot 10^{23}$.

Oppgave 2

I et eksperiment har du studert magnetisk hysterese ved å vikle opp en (plastbelagt) kobbertråd omkring et sylinderformet stykke jern. Ved å sende en vekselstrøm I gjennom kobbertråden har du kontroll på H-feltet inne i jernsylinderen ettersom $H = nI$, der n er antall viklinger pr lengdeenhet av kobbertråden. Ved hjelp av det eksperimentelle oppsettet i figuren til høyre måler du B-feltet inne i jernsylinderen. For hver periode av I, og dermed av H, følger B-feltet kurven i figuren til venstre, der pilene angir retningen på endringen i H-feltet. Målte verdier for $B(H = 0)$ og $H(B = 0)$ er angitt i figuren, og enheter benyttet for B og H er angitt på aksene.





Den målte hysteresekurven kan med god tilnærmelse representeres ved funksjonene

$$B(H) = B_0 \arctan\left(\alpha \frac{H \mp H_0}{H_0}\right)$$

der øvre og nedre fortegn gjelder for henholdsvis økende og avtagende verdier av H. Bestem størrelsene B_0, H_0 og α ved å sammenholde med den målte hysteresekurven.
Det kan vises at arealet innenfor hysteresekurven tilsvarer energien w som tapes i jernsylinderen pr volumenhet og pr hysteresesyklus. (Sjekk at $H \cdot B$ har enhet J/m^3!) Finn et uttrykk for w i dette eksperimentet. Dvs: Finn w uttrykt ved størrelser i ligningen over. (Tips: Finn først $H(B)$.) Bestem også tallverdi for w. Oppgi svaret i SI-enheter.

Oppgitt : $\qquad w = \oint H \, dB$

Oppgave 3

Bruk de to Maxwell-ligningene

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\text{in}}$$

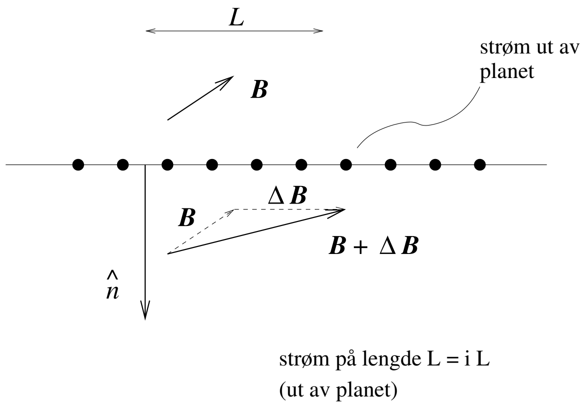
og

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

til å vise at diskontinuiteten ("spranget") i magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ når vi krysser et strømførende plan med strøm pr lengdeenhet $\boldsymbol{i}$ er

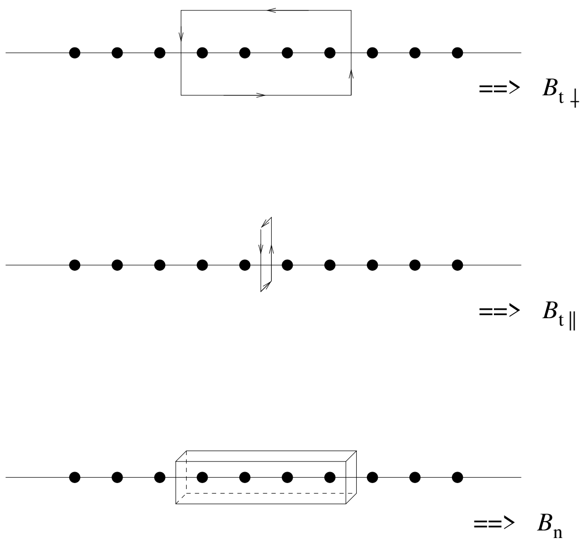
$$\Delta \boldsymbol{B} = \mu_0 \, \boldsymbol{i} \times \hat{n}$$

Her er $\hat{n}$ en enhetsvektor normalt til planet, med retning slik at $\Delta\boldsymbol{B}$ i figuren nedenfor blir en vektor mot høyre:



Tips: Bruk Gauss' lov for $\boldsymbol{B}$ til å vise at B_n, dvs komponenten av $\boldsymbol{B}$ normalt til planet, er kontinuerlig når vi krysser det strømførende planet. En fornuftig gaussflate er en fyrstikkeske med to av sideflatene parallelt med planet, beliggende på hver sin side av planet.
Bruk deretter Amperes lov til å vise at $B_{t\parallel}$ også er kontinuerlig ved kryssing av planet, mens $B_{t\perp}$ er diskontinuerlig med et sprang $\mu_0 i$. Her betrakter vi komponenten B_t av $\boldsymbol{B}$ tangentielt til planet. Denne kan igjen dekomponeres i en komponent parallelt med strømretningen,

$B_{t\|}$, og en komponent normalt til strømretningen, $B_{t\perp}$. Fornuftige amperekurver for denne delen av oppgaven er rektangler beliggende symmetrisk i forhold til det strømførende planet, med ulik orientering i forhold til strømretningen, avhengig av om vi skal ende opp med en grenseflatebetingelse for $B_{t\|}$ eller $B_{t\perp}$. Følgende figur kan muligens være til hjelp:



Kontroller til slutt at de tre grenseflatebetingelsene du har endt opp med, for hhv B_n, $B_{t\|}$ og $B_{t\perp}$, kan sammenfattes i ligningen for $\Delta \boldsymbol{B}$.

Kommentar 1: Gitt at vi har løst oppgaven i øving 12 om magnetfelt fra uendelig stort plan med uniform strøm, er egentlig denne oppgaven også løst: Det totale magnetfeltet ved en slik grenseflate må være lik magnetfeltet fra en liten bit av grenseflaten omkring der vi krysser pluss magnetfeltet fra "resten av verden" (husk: superposisjonsprinsippet). Magnetfeltet fra resten av verden må være kontinuerlig idet vi krysser grenseflaten (fordi alle strømelementer som bidrar til dette "resten-av-verden-feltet" ligger langt unna i forhold til den infinitesimale veien vi må gå for faktisk å krysse flaten). Følgelig må en eventuell diskontinuitet i det totale feltet være lik diskontinuiteten i feltet fra den lille biten omkring krysningspunktet. Denne lille biten ser ut som en uendelig stor, plan flate idet vi krysser flaten, for vi kan starte og ende vår flatekrysning så nær flaten som vi bare vil. Men da må feltet fra den lille biten av grenseflaten bli det samme som vi fant i øving 12, dvs $\mu_0 i/2$, med motsatt retning på hver side av grenseflaten, tangentielt til flaten og normalt på strømretningen. Følgelig med diskontinuitet lik $\mu_0 i$ i absoluttverdi og retning konsistent med ligningen for $\Delta \boldsymbol{B}$.

Kommentar 2: Dersom "systemet" vårt inneholder magnetiserbare medier, kan det tenkes at vi har grenseflater hvor vi vet hva *fri* strøm $\boldsymbol{i}_f$ pr lengdeenhet er. (Men vi kan kanskje ikke sånn uten videre si hva *total* strøm $\boldsymbol{i}$ pr lengdeenhet er. Jfr eksempelet med lang spole fylt med et magnetiserbart medium.) Du kan da bruke Amperes lov for $\boldsymbol{H}$ til å utlede grenseflatebetingelsen(e) for tangentialkomponenten $\boldsymbol{H}_t$ til H-feltet,

$$\Delta \boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{i}_f \times \hat{n}$$