TFY4104 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Test 7.

Oppgave 1
Newtons 2. lov for rotasjon om fast akse,

$$\tau = \dot{L} = I\dot{\omega} = I\ddot{\theta},$$

med dreiemoment $\tau = -D\theta$ gir ligningen

$$-D\theta = I\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{D}{I}\theta = 0.$$

Dette er en harmonisk oscillator med vinkelfrekvens $\omega_0 = \sqrt{D/I}$, og dermed svingetid $T = 2\pi\sqrt{I/D}$. Riktig svar: A.

Oppgave 2
Steiners sats gir at kulas treghetsmoment mhp en akse gjennom festepunktet er

$$I = I_0 + Md^2 = \frac{2}{5}MR^2 + M(3R/2)^2 = \frac{53}{20}MR^2.$$

Svingetiden blir dermed

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{53R}{30g}},$$

som med $R = 0.05$ m og $g = 9.81$ m/s^2 gir $T = 0.6$ s. Riktig svar: C.

Oppgave 3
Steiners sats gir at kulas treghetsmoment mhp en akse gjennom festepunktet er

$$I = I_0 + Md^2 = \frac{2}{3}MR^2 + M(2R)^2 = \frac{14}{3}MR^2.$$

Svingetiden blir dermed

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{7R}{3g}}.$$

Riktig svar: D.

Oppgave 4
Newtons 2. lov gir her ligningen

$$-kx - b\dot{x} = m\ddot{x},$$

som f.eks kan skrives

$$m\ddot{x} + kx = -b\dot{x}.$$

Vi regner så ut dE/dt (med bruk av kjerneregelen for derivasjon):

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx).$$

Her kan de to leddene i parentes erstattes av $-b\dot{x}$, slik at $|dE/dt| = b\dot{x}^2$. Riktig svar: E.

Oppgave 5
Nei, det er nok ikke bare å stille seg oppå ei fjærvekt og lese av tyngden, og dermed massen, når det ikke lenger er noen tyngdekraft til stede! Men med en enkel harmonisk oscillator går det fint. Stolen har, med $m_0 = 42$ kg og $T_0 = 0.79$ s, fjærkonstant

$$k = \frac{4\pi^2 m_0}{T_0^2} = 2657 \text{ N/m}.$$

Stol pluss astronaut har dermed, med $T_1 = 1.36$ s, masse

$$m_1 = \frac{kT_1^2}{4\pi^2} = 124 \text{ kg}.$$

Astronautens masse er da 82 kg. Riktig svar: C.

Oppgave 6
Ligningen for ladningen Q på kondensatoren kan skrives på formen

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0,$$

og vi gjenkjenner en harmonisk oscillator med frekvens

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Riktig svar: B.

Oppgave 7
Vi har et elektron pr 2 kjernepartikler, dvs en kroppsmasse $2u$ pr elektron. Med total kroppsmasse f.eks 70 kg blir antall elektroner ca

$$N_e \sim \frac{70}{2 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}} \sim 2 \cdot 10^{28},$$

som tilsvarer en elektrisk ladning

$$|Q_e| \sim 2 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \sim 3 \cdot 10^9 \text{ C} = 3 \text{ GC}.$$

Riktig svar: E.

Oppgave 8
Dette kan betraktes som to dipoler med dipolmoment $p_1 = qa$, med en vinkel på 60 grader i mellom. Vi må gange med $2\cos 30^\circ = \sqrt{3}$ for å finne summen av komponentene som ikke kansellerer hverandre, slik at $p = \sqrt{3}qa$. Riktig svar: A.

Oppgave 9
$V = 0$ i sentrum av trekanten, siden vi skal legge sammen coulombpotensialet $Q/4\pi\varepsilon_0 r$ fra de tre punktladningene, med lik avstand r, og med $Q = -q$ to ganger og $Q = 2q$ en gang. Riktig svar: C.

Oppgave 10
Totalt elektrisk felt i sentrum må av symmetrigrunner ha retning fra sentrum mot midten av forbindelseslinjen mellom de to negative punktladningene $-q$. Avstanden fra sentrum til hver av de tre punktladningene er

$$r = \frac{a/2}{\cos 30^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Bidraget fra $2q$ blir ganske enkelt

$$E_{2q} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 (a^2/3)} = \frac{6q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

Komponenten av bidraget fra de to ladningene $-q$ finner vi ved å gange med $\sin 30^\circ = 1/2$:

$$E_{-q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a^2/3)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3q/2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

Totalt felt i sentrum blir dermed

$$E = E_{2q} + 2E_{-q} = \frac{9q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

Riktig svar: E.

Oppgave 11
Her er det "god avstand" mellom svaralternativene, så kanskje et raskt estimat kan gi oss riktig svar? Med ladning pr lengdeenhet $\pm\lambda_0$ fordelt på en stav med lengde L må dipolmomentet bli $\lambda_0 L^2$, ganget med en tallfaktor som er av størrelsesorden 1. Med $\lambda_0 = 10^{-9}$ C/m og $L = 10^{-6}$ m er $\lambda_0 L^2 = 10^{-21}$ Cm, slik at B må være riktig svar.
Med "skikkelig" utregning:
En liten bit dx av staven i posisjon $x > 0$, med ladning $dq = \lambda_0 dx$, har sammen med en liten bit dx i posisjon $x - L/2$, med ladning $-dq = -\lambda_0 dx$, et lite dipolmoment $dp = \lambda_0 dx L/2$. Totalt dipolmoment blir da

$$p = \int dp = \frac{\lambda_0 L}{2} \int_0^{L/2} dx = \frac{1}{4}\lambda_0 L^2,$$

dvs $p = 0.25 \cdot 10^{-21}$ Cm. Riktig svar: B.

Oppgave 12
En liten bit dx av tråden i posisjon $x > 0$, med ladning $dq = \lambda(x)dx$, har sammen med en liten bit dx i posisjon $-x$, med ladning $-dq = -\lambda(x)dx$, et lite dipolmoment $dp = \lambda(x)dx2x$. Totalt dipolmoment blir da

$$\begin{aligned} p &= \int dp \\ &= \frac{2\lambda_0}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx \\ &= \frac{2\lambda_0}{\alpha}|_0^\infty \left(-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\right) \\ &= \frac{2\lambda_0}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Her hadde vi heller ikke trengt å regne: α må ha enhet 1/m, og λ_0 må ha enhet C/m. Dermed er det bare alternativ D som har riktig enhet Cm for elektrisk dipolmoment. Riktig svar: D.

Oppgave 13
Her er $V_1 = V_2 = 0$ siden bidragene til totalt potensial kansellerer fra de to ladningene $\pm Q$ til venstre og fra de to til høyre. I posisjon 3 er vi betydelig nærmere den ene positive ladningen Q enn de tre andre, og siden vi generelt har høyt potensial i nærheten av positiv ladning, er $V_3 > V_1$. Tilsvarende argumentasjon i posisjon 4, men med motsatt fortegn, gir $V_4 < V_1$. Riktig svar: A.

Oppgave 14
Av symmetrigrunner er $p = 0$: Dette er summen av to like store dipoler, en i positiv og en i negativ z-retning. Riktig svar: A.

Oppgave 15
Totalt elektrisk felt på positiv x-akse må peke i positiv x-retning. Den positive ladningen $2Q$ i origo gir et bidrag E_{2Q} i positiv x-retning. Hver av de to negative ladningene $-Q$ på z-aksen gir et bidrag E_{-Q} i negativ x-retning (z-komponentene kansellerer hverandre), men $2E_{-Q}$ er mindre enn E_{2Q}. Riktig svar: D.

Oppgave 16

I avstand 2 m fra disse ladningene ser systemet praktisk talt ut som en punktladning $-5q$. Den elektriske feltstyrken er derfor

$$E = \frac{5q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10^{-9}/4 = 22.5 \text{ N/C}.$$

Riktig svar: B.

Oppgave 17

Systemet er konservativt. Da kan vi bruke prinsippet om energibevarelse: Protonet til høyre har en potensiell energi U i utgangspunktet, men null kinetisk energi. Langt ute på x-aksen har protonet null potensiell energi, og dermed en kinetisk energi K lik opprinnelig potensiell energi U. Vi har

$$U = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2a} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 3a} = \frac{e^2}{24\pi\varepsilon_0 a},$$

som med $K = m_p v^2/2$ gir

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{12\pi\varepsilon_0 m_p a}}.$$

Riktig svar: C.

Oppgave 18

Samme argumentasjon som i oppgave 16: I avstand 0.30 m er dette praktisk talt en punktladning 2 μC. Feltstyrken i avstand 0.30 m er da

$$E = 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}/(0.3^2) = 2 \cdot 10^5 \text{ N/C},$$

dvs 200 kN/C. Riktig svar: C.

Oppgave 19

En liten buelengde $ds = Rd\theta$ av ringen, ved vinkel θ, og med ladning $dq = \lambda(\theta)ds = \lambda_0 \cos\theta R d\theta$, har sammen med en tilsvarende negativ ladning $-dq$ ved vinkel $\pi - \theta$ et lite dipolmoment $dp = dq \cdot 2R\cos\theta$, siden avstanden fra $-dq$ til dq er $2R\cos\theta$. Så må vi integrere over vinkelen θ fra $-\pi/2$ til $\pi/2$ for å få med hele ringen:

$$\begin{aligned} p &= \int dp \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda_0 \cos\theta R d\theta \cdot 2R\cos\theta \\ &= 2\lambda_0 R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta \end{aligned}$$

Ettersom $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, er $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$. Videre er $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ slik at $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. Dermed er $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, dvs $\cos^2\theta = (1/2)(1 + \cos 2\theta)$. Dermed:

$$\begin{aligned} p &= 2\lambda_0 R^2 |_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right) \\ &= 2\lambda_0 R^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \pi\lambda_0 R^2 \end{aligned}$$

Riktig svar: D.

Oppgave 20

En negativ ladning plassert i et elektrisk felt vil påvirkes av en elektrisk kraft slik at bevegelsen blir i retning høyere potensial, og i motsatt retning av feltet $\boldsymbol{E}$, men i retning lavere potensiell energi. Riktig svar: B.