Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektromagnetisme
Vår 2009

Løsningsforslag til øving 1

Aller først et par kommentarer angående notasjon: Mens vektorer på tavla blir angitt med en pil over symbolet, brukes typisk **fete** symboler i trykte notater, som her. Det betyr at $\boldsymbol{F}$ angir vektoren (f.eks. en kraft), og da både dens størrelse F og retning. Enhetsvektorer, dvs (dimensjonsløse) vektorer med lengde 1, angis med en ˆ over symbolet. Da har vi f.eks. sammenhengene $\boldsymbol{F} = |\boldsymbol{F}|\hat{F} = F\hat{F}$. Videre vil vi skrive de ulike *komponentene* av en vektor med en senket indeks, f.eks. F_x for x-komponenten av $\boldsymbol{F}$.

Oppgave 1

a) Riktig svar er B:

$$A = |\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{7.1^2 + 1.3^2} = 7.2$$

b) Riktig svar er C:
Vektoren $\boldsymbol{A}$ har negativ x-komponent og negativ y-komponent, hvilket betyr at den ligger i 3. kvadrant. La oss først bestemme vinkelen θ mellom negativ x-akse og $\boldsymbol{A}$. Vi har da

$$\tan\theta = \frac{|A_y|}{|A_x|} = \frac{2.3}{3.7}$$

som gir $\theta = 32$ grader. Den søkte vinkelen, når vi går mot urviseren fra positiv x-akse til $\boldsymbol{A}$, må da bli lik $180 + \theta = 212$ grader.

c) Riktig svar er A:
La oss sette $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$. Da er

$$C_x = B_x - A_x = -10.7$$

$$C_y = B_y - A_y = 3.9$$

slik at absoluttverdien til $\boldsymbol{C}$ blir

$$C = |\boldsymbol{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{10.7^2 + 3.9^2} = 11.4$$

d) Riktig svar er D:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y = 6.1 \cdot (-9.8) + (-5.8) \cdot 4.6 = -86.5$$

e) Riktig svar er D:

$$\int_0^1 \left(x + x^2\right)\, dx = |_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

f) Riktig svar er C:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{r}$$

g) Riktig svar er B:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} = (0,0,1)$$

Oppgave 2

a) Med 0.20 g pr cm og lengde 100 cm blir trådens masse

$$m = \mu \cdot L = 0.20 \frac{\text{g}}{\text{cm}} \cdot 100 \text{ cm} = 20 \text{ g}$$

Trådens volum er

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{20\,\text{g}}{8.92\,\text{g/cm}^3} = 2.24\,\text{cm}^3$$

slik at tverrsnittet er

$$t = \frac{V}{L} = \frac{2.24\,\text{cm}^3}{100\,\text{cm}} \simeq 0.022\,\text{cm}^2$$

Følgelig er diameteren

$$d = \sqrt{\frac{4t}{\pi}} \simeq 0.17\,\text{cm} = 1.7\,\text{mm}$$

b) Vi ser av $t(x)$ at tråden er tynnest ved $x = 0$ og $x = L$, dvs på endene. Her er tykkelsen $t_0(1-1/4) = 3t_0/4$, dvs 2.25 mm^2. Den er tykkest på midten, ved $x = L/2$. Her er tykkelsen t_0, dvs 3 mm^2. Med variabelt tverrsnitt $t(x)$ må vi summere opp små massebiter $dm = \rho \cdot t(x) \cdot dx$, for å bestemme total masse, dvs vi må *integrere*:

$$m = \int dm = \int \rho \cdot t(x) \cdot dx$$

Her har jeg foreløpig ikke spesifisert noen integrasjonsgrenser, men det er klart at jeg skal integrere "over hele trådens utstrekning". Det siste integralet i ligningen over skal gjøres med hensyn på posisjonen x, og dermed gir grensene seg selv, nemlig $x = 0$ som nedre grense og $x = L$ som øvre grense:

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^L \rho \cdot t_0 \left(1 - \left(\frac{x - L/2}{L}\right)^2\right) \cdot dx \\
&= \rho t_0 |_0^L \left(x - \frac{1}{3L^2}\left(x - L/2\right)^3\right) \\
&= \rho t_0 \left(L - \frac{1}{3L^2}\left(L^3/8 + L^3/8\right)\right) \\
&= \frac{11}{12} \rho t_0 L
\end{aligned}$$

Med tallverdier:

$$m = \frac{11}{12} \cdot 8.92 \cdot 0.03 \cdot 100 \simeq 24.5$$

som blir i enheten gram, ettersom vi har bare har brukt enhetene g og cm underveis.

c) Midlere (dvs gjennomsnittlige) masse pr kobberatom blir

$$\langle m \rangle = \frac{63 \cdot 69.17 + 65 \cdot 30.83}{100} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 1.06 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$$

De 29 elektronene i hvert kobberatom har tilsammen masse

$$29 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 2.6 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{kg}$$

så disse kan trygt neglisjeres.

d) Antall kobberatomer i tråden blir

$$N = \frac{0.020}{1.06 \cdot 10^{-25}} \simeq 1.89 \cdot 10^{23}$$

Dette tilsvarer

$$\frac{1.89 \cdot 10^{23}}{6.02 \cdot 10^{23}}\,\mathrm{mol} \simeq 0.31\,\mathrm{mol}$$

e) Protonene i tråden har tilsammen ladning

$$Q_p = N \cdot 29 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \simeq 877\,\mathrm{kC}$$

Elektronene i tråden har like stor ladning, men med motsatt fortegn,

$$Q_e = -Q_p$$

Trådens totale ladning er null.

Oppgave 3

a) Uniform ladning σ_0 pr flateenhet og areal πR^2 gir total ladning

$$Q = \sigma_0 \pi R^2$$

Her kunne en kanskje tenke seg at ei slik skive vil ha to sider, og dermed en overflate med totalt areal $2\pi R^2$. Men i så fall ville det ha vært opplyst om at skiva hadde en viss tykkelse, og at ladningen befant seg på overflaten av skiva. Men for all del: *Spør* hvis du er i tvil om hvordan en oppgave skal tolkes!

b) Med ladningstetthet som avtar lineært med avstanden r fra skivas sentrum:

$$\begin{aligned} Q &= \int dq = \int_0^R \sigma_0\,(1 - r/R) \cdot 2\pi r \cdot dr \\ &= 2\pi\sigma_0 |_0^R \left(r^2/2 - r^3/3R\right) \\ &= 2\pi\sigma_0 \left(R^2/2 - R^2/3\right) \\ &= \frac{1}{3}\pi\sigma_0 R^2 \end{aligned}$$

Oppgave 4

Vi kan med god tilnærmelse regne oksygenmolekylene som punktformede legemer ettersom avstanden mellom dem (300 Å) er mye større enn hvert enkelt molekyls utstrekning (av størrelsesorden 2 - 3 Å). Massen til et oksygenmolekyl er $m(O_2)$ = (32 g/mol) / ($6.02 \cdot 10^{23}$ molekyler/mol) = $5.32 \cdot 10^{-23}$ g/molekyl = $5.32 \cdot 10^{-26}$ kg. Gravitasjonskraften mellom de to oksygenmolekylene blir da

$$F_g = G\frac{m(\mathrm{O}_2)^2}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot \frac{(5.32 \cdot 10^{-26})^2\ \mathrm{kg}^2}{(300 \cdot 10^{-10})^2\ \mathrm{m}^2} = 2.09 \cdot 10^{-46}\ \mathrm{N}$$

Gravitasjonskrefter er alltid *tiltrekkende*.

Med ett ekstra elektron har hvert ion O_2^- en ladning $q = -e$. Den elektriske kraften F_e mellom de to ionene blir dermed

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(300 \cdot 10^{-10})^2} = 2.56 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{N}$$

Med ladningene i enheten C og avstanden i enheten m, samt SI-verdien $9 \cdot 10^9$ for faktoren $1/4\pi\varepsilon_0$ er vi sikret at kraften kommer ut i enheten N.

Den elektriske kraften mellom to ladninger med *samme fortegn* er *frastøtende*.

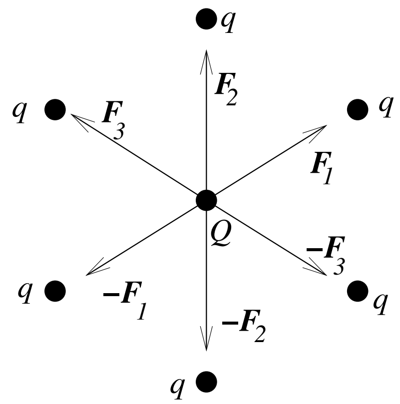
Forholdet mellom de to kreftene er

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{2.56 \cdot 10^{-13}}{2.09 \cdot 10^{-46}} \sim 10^{33}$$

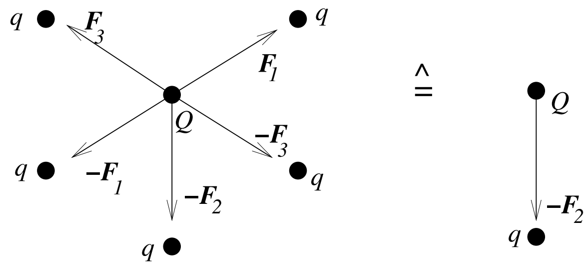
Dette betyr at gravitasjonskreftene mellom ("ikke altfor store") ladete legemer som regel kan neglisjeres i forhold til den elektriske kraften. Dette forholdet er ikke avhengig av avstanden mellom de to ionene ettersom både F_e og F_g avhenger av innbyrdes avstand som $1/r^2$.

Oppgave 5

a) På grunn av symmetrien i problemet er det vel innlysende at testladningen Q blir utsatt for null nettokraft, i det kreftene fra to og to ladninger kansellerer hverandre:



b) Vi fjerner en av ladningene, f.eks. den "øverste":



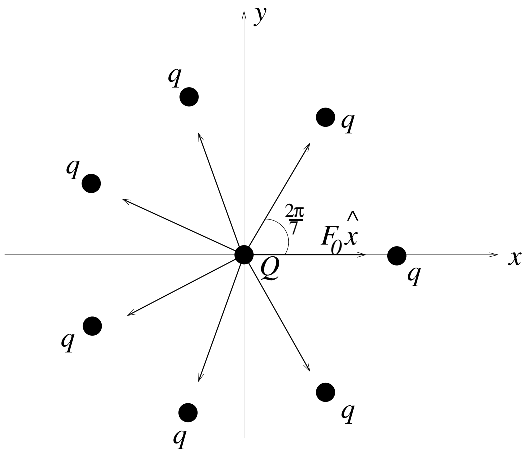
Det er da umiddelbart klart at nettokraften på Q blir lik kraften fra den ladningen vi fjernet, med motsatt fortegn, altså -$\boldsymbol{F}_2$.

Vi har her brukt *superposisjonsprinsippet.* Matematisk kunne vi f.eks. formulere løsningen slik: La $\sum_{(6)} \boldsymbol{F}_i$ angi nettokraften med alle 6 ladningene til stede og $\sum_{(5)} \boldsymbol{F}_i$ nettokraften etter vi har fjernet ladningen som påvirket Q med kraften $\boldsymbol{F}_2$. Da er

$$\sum_{(5)} \boldsymbol{F}_i = \sum_{(6)} \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{F}_2 = 0 - \boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_2$$

c) Også med et odde antall q-ladninger, f.eks. 7, må nettokraften på testladningen Q i sentrum bli lik null. Anta at nettokraften *ikke* var null. En dreining av systemet på 360/7 ° i papirplanet ville da medføre at nettokraften endret retning. Men systemet er uendret som følge av en slik dreining, så kraften på Q kan heller ikke ha endret seg og må følgelig være null.

Hvis noen mot formodning ikke er overbevist, er det jo bare å regne ut nettokraften. Legg Q i origo og (f.eks.) den ene q på x-aksen:



Nettokraften på Q blir da:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= F_x\hat{x} + F_y\hat{y} \\
&= F_0\,(1 + 2\cos 2\pi/7 + 2\cos 4\pi/7 + 2\cos 6\pi/7)\,\hat{x} + \\
&\quad F_0\,(0 + \sin 2\pi/7 + \sin(-2\pi/7) + \sin 4\pi/7 + \sin(-4\pi/7) + \sin 6\pi/7 + \sin(-6\pi/7))\,\hat{y} \\
&= F_0\,(1 + 1.247 - 0.445 - 1.802)\,\hat{x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Her har vi satt absoluttverdien av kraften mellom q og Q lik F_0 og benyttet at $\cos(-x) = \cos x$ og $\sin(-x) = -\sin x$.