Institutt for fysikk, NTNU
TFY4155/FY1003 Elektromagnetisme
Vår 2009

Løsningsforslag til øving 4

Oppgave 1

a) Vi skriver først V_a om til en funksjon av x og z:

$$V_a = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{qa\, z/r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{qaz}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+z^2)^{3/2}}$$

Når vi deretter skal skrive et octave-program som plotter V_e og V_a, foretrekker jeg å innføre dimensjonsløse størrelser, slik at vi ender opp med å plotte *essensen* i de aktuelle funksjonene. I dette problemet inneholder uttrykkene våre ladningen q og lengdeskalaen a, så det er naturlig å innføre det konstante potensialet

$$V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

og deretter dimensjonsløse størrelser $\xi = x/a$, $\eta = z/a$, $v_e = V_e/V_0$ og $v_a = V_a/V_0$. Da har vi

$$\begin{aligned} v_e(\xi,\eta) &= \frac{1}{\sqrt{\xi^2+(\eta-1/2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2+(\eta+1/2)^2}} \\ v_a(\xi,\eta) &= \frac{\eta}{(\xi^2+\eta^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

I det nye dimensjonsløse (ξ,η)-planet ligger altså dipolen på η-aksen, i $\pm 1/2$. Et fornuftig område for plotting av funksjonene v_e og v_a kan dermed være for eksempel $-2 < \xi < 2$ og $-2 < \eta < 2$.

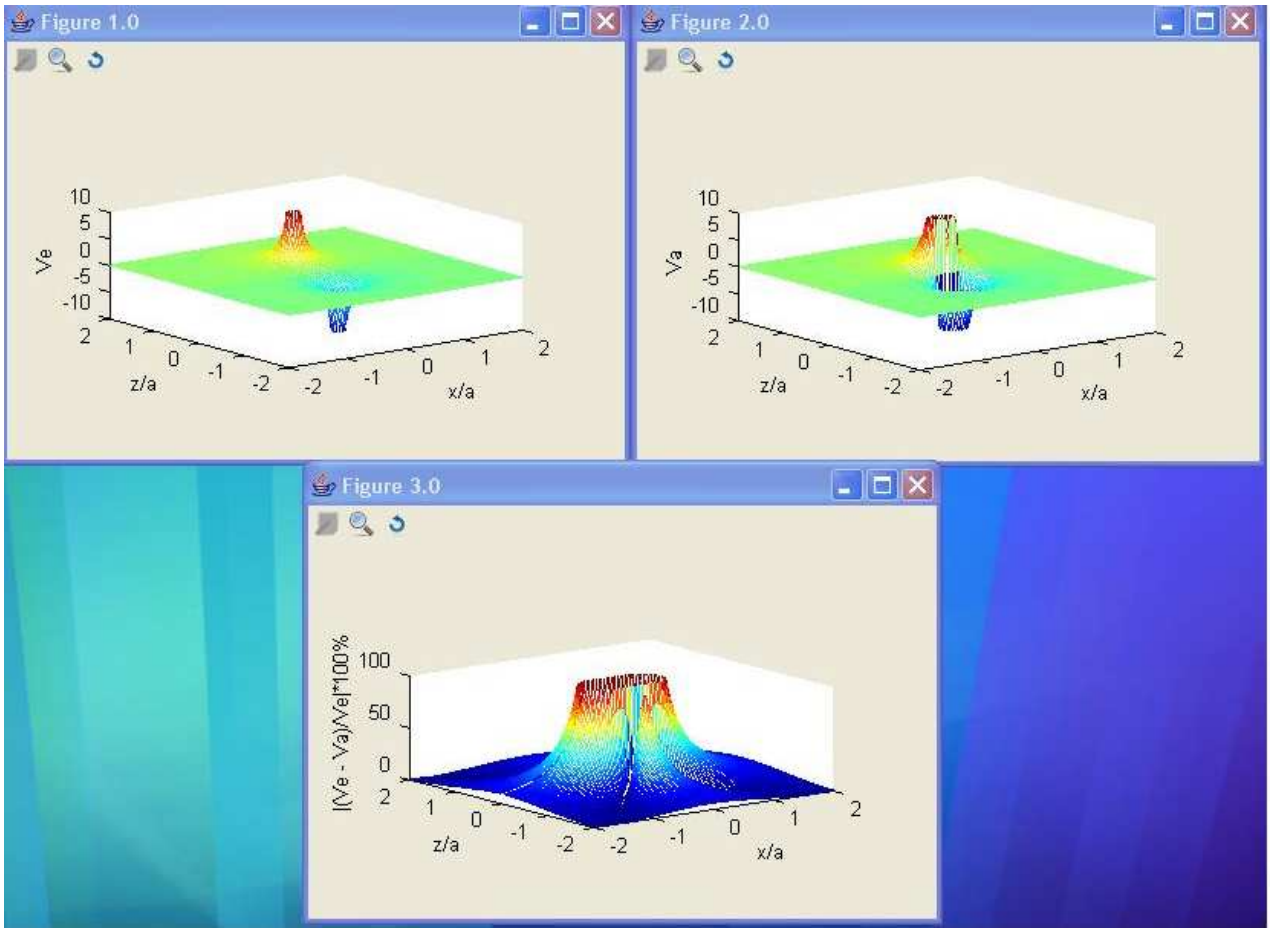
På neste side har vi en octave-kode som plotter v_e, v_a og det prosentvise avviket

$$\Delta = \left|\frac{v_e - v_a}{v_e}\right| \cdot 100$$

i tre separate figurer:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%                 Losningsforslag til oppgave 1a i oving 4                     %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Velg omraadet -2 < x < 2 og -2 < z < 2 for plotting, med skrittlengde
% 2/50 langs baade x og z, dvs ca 100 x 100 punkter i alt
[x,z] = meshgrid(-2:2/50:2,-2:2/50:2);
% Ve er det eksakte potensialet fra dipolen
Ve = (1./(sqrt(x.^2+(z-1/2).^2))-1./(sqrt(x.^2+(z+1/2).^2)));
% Va er dipolpotensialet til ledende orden i a/r naar r >> a
Va = z.*(x.^2.+z.^2).^(-3/2);
% Relavvik er relativ differanse mellom Ve og Va i prosent
Relavvik = 100*abs((Ve-Va)./(Ve));
% Kommandoen figure ber om en ny figur
figure;
% Kommandoen mesh(x,y,z) tegner opp et 3D-plott av z som funksjon
% av x og y
mesh(x,z,Ve);
% Kommandoen axis([a b c d e f]) setter aksene for 3D-plot slik:
% a < x < b, c < y < d, e < z < f
axis([-2 2 -2 2 -10 10]);
% Kommandoen caxis([zmin zmax]) setter fargeskalaen slik at blaatt
% tilsvarer zmin og rodt tilsvarer zmax
caxis([-10 10]);
% Tekst paa aksene
xlabel('x/a');
ylabel('z/a');
zlabel('Ve');
% Ny figur for Va
figure;
mesh(x,z,Va);
axis([-2 2 -2 2 -10 10]);
caxis([-10 10]);
xlabel('x/a');
ylabel('z/a');
zlabel('Va');
figure;
% Ny figur for relativdifferansen
mesh(x,z,Relavvik);
% Kun positive verdier for Relavvik
axis([-2 2 -2 2 0 100]);
% Fargeskala settes for Relavvik mellom 0 og 100
caxis([0 100]);
xlabel('x/a');
ylabel('z/a');
zlabel('|(Ve - Va)/Ve|*100%');
```

Når dette programmet kjøres i octave, resulterer det i disse figurene:



På neste side er et alternativt løsningsforslag, der vi benytter kommandoen linspace, samt såkalte "function handles" når vi definerer funksjonene som skal plottes:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%        Alternativt losningsforslag til oppgave 1a i oving 4                  %
%        (uten veldig mange kommentarer)                                       %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x=linspace(-2,2,101);      % Lager en vektor med 101 elementer.
[X, Z] = meshgrid(x);     % Lager x og z koordinater for plot med x-vektoren som basis
%
% Erklaerer funksjonene
% Ve = eksakt potensial
Ve=@(x,z) (1./(sqrt(x.^2+(z-1/2).^2))-1./(sqrt(x.^2+(z+1/2).^2)));
% Va = potensial til ledende orden i a/r
Va=@(x,z) z.*(x.^2.+z.^2).^(-3./2);
% Relavvik = relativ differanse i prosent
Relavvik=@(x,z) abs((Ve(x,z)-Va(x,z))./Ve(x,z))*100;
%
% Plotter funksjonene
%
figure;
mesh(x,x,Ve(X,Z));
axis([-2 2 -2 2 -10 10]);
caxis([-10 10]);
xlabel('x/a');
ylabel('z/a');
zlabel('eksakt V');
figure;
mesh(x,x,Va(X,Z));
axis([-2 2 -2 2 -10 10]);
caxis([-10 10]);
xlabel('x/a');
ylabel('z/a');
zlabel('approx V');
figure;
mesh(x,x,Relavvik(X,Z));
axis([-2 2 -2 2 0 100]);
caxis([0 100]);
xlabel('x/a');
ylabel('z/a');
zlabel('Rel diff i prosent');
```

b) Her har vi oppgitt $V_a(r,\theta)$ og gradientoperatoren i kulekoordinater, så det er bare å regne i vei (ingenting avhenger her av vinkelen ϕ, så leddet som inneholder $\partial/\partial\phi$ trenger vi ikke å bry oss med):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(r,\theta) &= -\nabla V_a(r,\theta) \\ &= -\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ &= \hat{r}\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}+\hat{\theta}\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\end{aligned}$$

Vi merker oss at feltet fra en elektrisk dipol i stor avstand r fra dipolen faller av som $1/r^3$, altså raskere enn feltet fra en elektrisk "monopol", dvs en punktladning, som faller av som $1/r^2$. Feltbidragene fra de to ladningene med motsatt fortegn kansellerer hverandre delvis, men ikke fullstendig, ettersom retningen på de to bidragene til $\boldsymbol{E}$ alltid vil være litt forskjellig.

Hvis $\theta = 0$, får vi

$$E_r = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

og

$$E_\theta = 0$$

Dette virker rimelig: Vi er nå i et punkt langt ute på z-aksen, slik at radiell retning blir nettopp langs z-aksen, mens θ-retningen blir langs x-aksen. Og på z-aksen må vel det elektriske feltet åpenbart ha retning langs z-aksen.
Hvis $\theta = \pi/2$, får vi

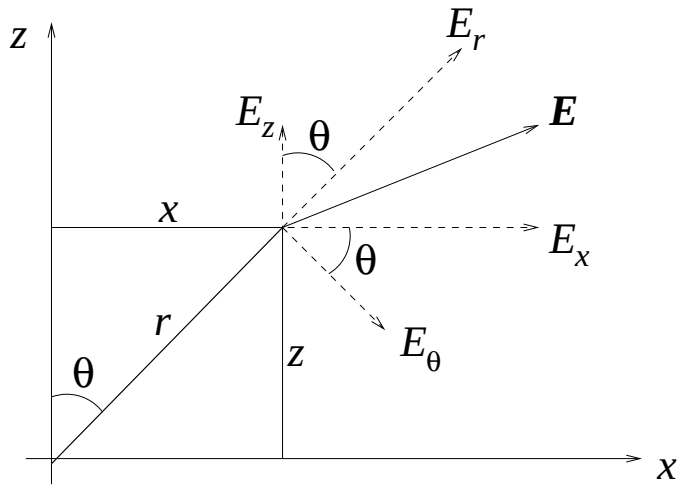
$$E_r = 0$$

og

$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Dette virker også rimelig: Vi er nå i et punkt langt ute på x-aksen, slik at radiell retning blir nettopp langs x-aksen, mens θ-retningen blir langs negativ z-akse. Og på x-aksen må vel det elektriske feltet åpenbart ha retning langs negativ z-akse.
Setter vi inn $r = 0$ i uttrykkene for E_r og E_θ, ser vi at begge to går mot uendelig. Det er imidlertid ikke et reelt problem fordi vi nå forsøker å bruke uttrykket for E utenfor gyldighetsområdet $r \gg a$. Feltet i origo er langt fra uendelig, og heller ikke vanskelig å regne ut. Det klarer du helt sikkert selv!

c) Av figuren nedenfor skulle det gå relativt klart fram hvordan den elektriske feltvektoren $\boldsymbol{E}$ enten kan dekomponeres i E_r og E_θ eller i E_x og E_z.



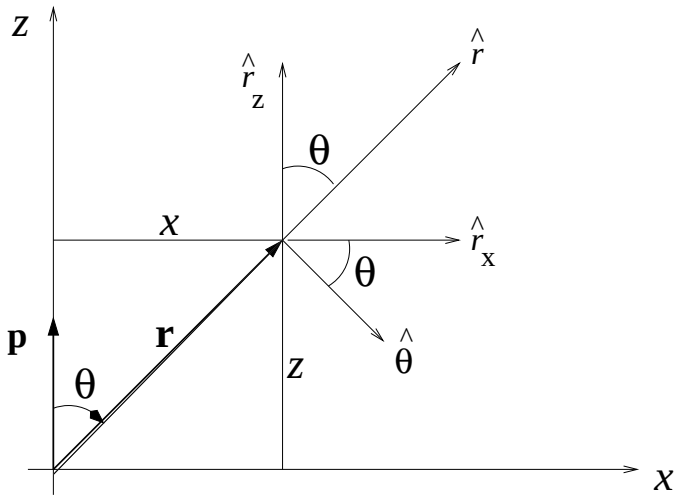
Både E_r og E_θ har komponenter i x-retning, og den totale x-komponenten av feltet må bli summen av disse to. Figurbetraktning gir:

$$\begin{aligned} E_x &= E_r \sin\theta + E_\theta \cos\theta \\ &= \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \sin\theta + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \cos\theta \\ &= \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \sin\theta\cos\theta \\ &= \frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \\ &= \frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2+z^2\right)^{5/2}} \end{aligned}$$

Her har vi brukt $\sin\theta = x/r$, $\cos\theta = z/r$ og $r = (x^2+z^2)^{1/2}$.
Helt tilsvarende finner vi z-komponenten:

$$\begin{aligned} E_z &= E_r \cos\theta - E_\theta \sin\theta \\ &= \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \cos\theta - \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot \sin\theta \\ &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\ &= \frac{\left(2z^2 - x^2\right) p}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2+z^2\right)^{5/2}} \end{aligned}$$

d) La oss starte med en figur som viser sammenhengen mellom de ulike vektorkomponentene:



Da har vi:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= p_x\,\hat{x} + p_z\,\hat{z} \\
p_x &= 0 \\
p_z &= p \\
\boldsymbol{p} &= p_r\,\hat{r} + p_\theta\,\hat{\theta} \\
\boldsymbol{p}\cdot\hat{r} &= p_r = p\cos\theta \\
\boldsymbol{p}\cdot\hat{\theta} &= p_\theta = -p\sin\theta \\
\hat{r} &= \hat{r}_x\,\hat{x} + \hat{r}_z\,\hat{z} \\
\hat{r}_x &= \sin\theta = x/r = x/\sqrt{x^2+z^2} \\
\hat{r}_z &= \cos\theta = z/r = z/\sqrt{x^2+z^2}
\end{aligned}
$$

Vi har nå det vi trenger for å skrive ned E_r osv, fra det gitte uttrykket på koordinatfri form:

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\boldsymbol{p}\cdot\hat{r} - p_r\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3p_r - p_r\right] \\
&= \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_\theta &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[0 - p_\theta\right] \\
&= \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(p\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r}_x - p_x\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3p(z/r)(x/r) - 0\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \\
&= \frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+z^2)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_z &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(p\hat{z}\cdot\hat{r})\hat{r}_z - p_z\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3p(z/r)(z/r) - p\right] \\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3z^2/r^2 - 1\right] \\
&= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3z^2/(x^2+z^2) - (x^2+z^2)/(x^2+z^2)\right] \\
&= \frac{(2z^2-z^2)p}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+z^2)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

Alle fire i samsvar med det vi fant i *b*) og *c*).

Oppgave 2

a) **D**
Total potensiell energi for et system med punktladninger er

$$U = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

der summen går over alle par av ladninger q_i og q_j i innbyrdes avstand r_{ij}. Her er alle ladninger like store i absoluttverdi. Vi har 4 par med motsatt fortegn i innbyrdes avstand 5 cm og 2 par (diagonalt) med likt fortegn i innbyrdes avstand $\sqrt{50}$ cm. Dermed får vi:

$$U = 9\cdot 10^9 \cdot (9\cdot 10^{-6})^2 \cdot \left[-\frac{4}{0.05} + \frac{2}{\sqrt{50}\cdot 10^{-2}}\right] \simeq -38 \text{ J}$$

b) **D**
Punktladningene Q_1 og Q_2 flyttes ikke, så innbyrdes potensiell energi for dette paret trenger vi ikke å bry oss om fordi den endres ikke når den tredje ladningen (elektronet) flyttes. Vi må regne ut potensiell energi som skyldes vekselvirkningen mellom elektronet og de to fastliggende ladningene, henholdsvis før og etter forflytningen. Alternativt kan vi regne ut potensialet fra ladningene Q_1 og Q_2 i punktene A og B, hhv V_A og V_B, og deretter endringen i potensiell energi,

$\Delta U = U_B - U_A = -eV_B - (-e)V_A = -e(V_B - V_A)$. Potensialet i avstand r fra en punktladning q er

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

dvs Coulombpotensialet. De aktuelle avstandene her er 0.6 m (fra Q_1 til A og fra Q_2 til B) og $\sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = 1.0$ m (fra Q_1 til B og fra Q_2 til A). Dermed:

$$V_A = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.6} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 1.0}$$

og

$$V_B = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 1.0} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 0.6}$$

som gir

$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{2(Q_1 - Q_2)}{3 \cdot 4\pi\varepsilon_0} = -\frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (69 + 98) \cdot 10^{-9} = -1002 \text{ V}$$

og endelig

$$\Delta U = -e \cdot \Delta V \simeq +1 \text{ keV}$$

c) **B**. Potensialet fra en punktladning er $V(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r$ når $V(r \to \infty)$ er satt til null. Med $V = 50$ V finner vi

$$r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 V} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-8}}{50} = 1.8 \text{ m}$$

Med SI-enheter for alle størrelser som inngår er vi garantert at svaret også kommer ut i SI-enhet, dvs m.

d) **D**

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \text{graf 5}$$

e) **A**

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -2\frac{\text{V}}{\text{m}}$$